CAPITOLO 4

INTEGRALI CURVILINEI

4.1 - Curve regolari in $\mathbb{R}^n$

Nel primo capitolo sono state richiamate alcune nozioni di Geometria Analitica sulle curve piane e sghembe, e si è visto come scrivere le equazioni parametriche di alcune di esse. Come si è già osservato, una curva in $\mathbb{R}^n$ può essere definita come il grafico di una *funzione a valori vettoriali*, cioè di una funzione $\boldsymbol{r}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, nella quale il dominio è un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ (ad esempio un intervallo), e ad ogni t in I corrisponde un punto $\boldsymbol{r}(t) =$ $= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ dello spazio $\mathbb{R}^n$.

In questo primo paragrafo diamo un cenno sui limiti e sulle derivate delle funzioni a valori vettoriali, e soprattutto diamo l'importantissima definizione di **curva regolare**, per poi passare alla trattazione degli integrali curvilinei.

I concetti di limite e di continuità per le funzioni a valori vettoriali si definiscono immediatamente riconducendosi alle funzioni reali di una variabile reale. Si dice che $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, dove $\vec{a}$ è il vettore $(a_1, \dots, a_n)$, se per ogni $k = 1, \dots, n$ è $\lim\limits_{t \to t_0} x_k(t) = a_k$; perciò le funzioni $x_k(t)$ devono essere definite almeno in un intorno bucato di t_0. Se inoltre ciascuna $x_k(t)$ è definita anche in t_0, e se $\lim\limits_{t \to t_0} x_k(t) = x_k(t_0)$, sarà $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$, e la funzione $\vec{r}(t)$ si dirà *continua* in t_0; da ciò si ha subito la definizione di continuità in tutto I.

Vale per le funzioni vettoriali continue su un intervallo I un significato intuitivo di continuità simile a quello noto per le funzioni reali: la curva ottenuta da una funzione a valori vettoriali continua sarà una curva "continua" in $\mathbb{R}^n$, nel senso che se t varia "di poco" il corrispondente punto $\vec{r}(t)$ si sposterà "di poco"; si ottiene insomma una curva costituita "di un solo pezzo", cioè priva di improvvisi salti.

Il seguente teorema mette in relazione la continuità della funzione a valori vettoriali $\vec{r}(t)$ con la continuità della funzione reale $f(t) = |\vec{r}(t)|$ [1].

TEOREMA 25. *Una funzione $\vec{r}(t)$ a valori vettoriali è continua in un punto t_0 se e solo se è continua in tale punto la funzione $|\vec{r}(t)|$.*

Dimostrazione. Dire che $\vec{r}$ è continua nel punto t_0 equivale a dire che tutte le sue componenti $x_k(t)$ ($k = 1, ..., n$) sono continue in tale punto; perciò è continua in t_0 anche la funzione $f(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{x_1^2(t) + \cdots + x_n^2(t)}$. Viceversa, supponiamo $f(t) = |\vec{r}(t)|$ continua in t_0, e supponiamo dapprima $f(t_0) = \mathbf{0}$, cioè $x_k(t_0) = 0$ per ogni $k = 1, ..., n$; fissato ε positivo, per ipotesi esiste un numero δ tale che per ogni t nell'intorno $(t_0 - \delta , t_0 + \delta)$ è $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$, cioè $\sqrt{x_1^2(t_0) + \cdots + x_n^2(t_0)} < \varepsilon$. Ma siccome per qualunque vettore $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ risulta $a_k \le |\vec{a}|$ per ciascuna delle componenti a_k, nell'intorno $(t_0 - \delta , t_0 + \delta)$ vale $| x_k(t) | \le \varepsilon$, per cui $x_k(t)$ è continua in t_0; il caso generale si dimostra osservando che $\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ equivale a $\lim_{t \to t_0} (\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)) = \mathbf{0}$. □

Una funzione $\boldsymbol{r}(t)$ a valori vettoriali si dice *derivabile* in un punto $t_0 \in I$ se in tale punto sono derivabili tutte le componenti $x_k(t)$: in tal caso il vettore $\boldsymbol{r}'(t_0)$ è definito come $(x_1'(t_0), \ldots, x_n'(t_0))$. Per quanto riguarda le derivate delle varie combinazioni di funzioni scalari e vettoriali, si può osservare che valgono delle regole molto simili a quelle valide per le ordinarie funzioni di una variabile. Ad esempio, la derivata di una funzione $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}$ è $\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{s}'$ (supponiamo naturalmente che $\boldsymbol{r}$ ed $\boldsymbol{s}$ siano due funzioni vettoriali aventi lo stesso numero di componenti, e che esse siano derivabili in uno stesso insieme). Anche le formule riguardanti i prodotti presentano delle notevoli

---

[1] Indichiamo con $|\vec{v}|$ il modulo del vettore $\vec{v}$, cioè la radice quadrata della somma dei quadrati delle sue componenti; alcuni autori utilizzano con lo stesso significato il simbolo $\|\vec{v}\|$, detto *norma* di $\vec{v}$.

analogie alla formula per la derivazione di un prodotto di due ordinarie funzioni reali; ad esempio, vale la formula $D(f\boldsymbol{r}) = f'\boldsymbol{r} + f\boldsymbol{r}'$, dove f è una funzione (scalare) della variabile t. Inoltre, per quanto riguarda i prodotti scalari e vettoriali, valgono le formule $D(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s}'$ e $D(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{s} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}'$ [2] (naturalmente quest'ultima ha senso solo se $\boldsymbol{r}$ ed $\boldsymbol{s}$ sono funzioni a valori in $\mathbb{R}^3$).

Come conseguenza della formula di derivazione di un prodotto scalare, osserviamo che se sull'intervallo I è data una funzione $\boldsymbol{r}(t)$ tale che $|\boldsymbol{r}(t)|$ è costante, allora il prodotto scalare $\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t)$ è identicamente nullo, cioè i vettori $\boldsymbol{r}(t)$ ed $\boldsymbol{r}'(t)$ sono ortogonali. Infatti, posto $g(t) = |\boldsymbol{r}(t)|^2 = \boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}(t)$, si ha $g'(t) = 0$, essendo per ipotesi g costante; ma, per la formula detta prima, si ha $g'(t) = \boldsymbol{r}'(t) \cdot \boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t) = 2\,\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t)$: perciò $\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t) = 0$ in tutto I. Torneremo nel prossimo paragrafo su questa proprietà, per osservarne le conseguenze geometriche e fisiche.

Possiamo considerare infine la derivata di una funzione composta tra una $\boldsymbol{r}$ vettoriale ed una u scalare: se u una funzione di variabile reale, definita in un intervallo $J \subseteq \mathbb{R}$, e se il suo codominio contiene l'intervallo I in cui è definita $\boldsymbol{r}$, funzione vettoriale n-dimensionale, si ha $D(\boldsymbol{r}(u(t)) = \boldsymbol{r}'(u(t))u'(t)$, in analogia con la formula di derivazione di un'ordinaria funzione composta

Passiamo ora alla definizione di curva regolare, che come si vedrà gioca un ruolo molto importante nella teoria degli integrali curvilinei.

DEFINIZIONE DI ARCO DI CURVA REGOLARE. Data una funzione $\boldsymbol{r}(t)$, definita in un intervallo $I = [a\ , b] \subset \mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{R}^n$, il suo grafico si dirà un ***arco di curva regolare*** (brevemente una ***curva regolare***) se sono verificate le seguenti condizioni:

(*i*) la funzione $\boldsymbol{r}$ è derivabile in I, e la sua derivata $\boldsymbol{r}'(t)$ è continua in I;
(*ii*) il modulo di $\boldsymbol{r}'(t)$ è strettamente positivo in tutto I, cioè le componenti $x_1'(t),\ldots,x_n'(t)$ di $\boldsymbol{r}'(t)$ non sono tutte nulle per uno stesso $t \in I$;
(*iii*) comunque si prendano t_1 e t_2 in I distinti tra loro, si ha $\boldsymbol{r}(t_1) \neq \boldsymbol{r}(t_2)$.

---

[2] Utilizziamo il puntino di moltiplicazione per indicare il prodotto scalare tra vettori di $\mathbb{R}^n$ e il simbolo "$\times$" (cioè lo stesso che si usa per il prodotto cartesiano) per indicare il prodotto vettoriale tra vettori di $\mathbb{R}^3$.

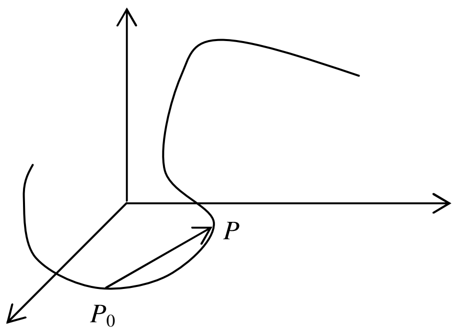
Ad esempio, la curva di equazioni $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ con $t \in I = [0 , \pi]$ (che è una semicirconferenza) è regolare, in quanto le componenti di $\boldsymbol{r}'(t)$ sono $-\operatorname{sen} t$ e $\cos t$, funzioni continue e mai contemporaneamente nulle in I; è ovvio inoltre che per $t_1 \neq t_2$ non può mai essere $\boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}(t_2)$. Se però si facesse variare t ad esempio nell'intervallo $J = [0 , 4\pi]$ la curva non sarebbe più regolare, in quanto sarebbe violata la condizione (*iii*) (ad esempio si avrebbe $\boldsymbol{r}(\pi) = \boldsymbol{r}(3\pi)$). Come ulteriore esempio, si consideri la curva $\boldsymbol{r}(t) = (t^3 , t^2)$, con $t \in [-1 , 1]$: essa non è regolare, perché per $t_0 = 0$ si ha $\boldsymbol{r}'(t_0) = (0 , 0)$.

Si osservi il significato geometrico delle condizioni di regolarità: la (*i*) e la (*ii*) servono ad assicurare l'esistenza di una retta tangente in ciascun punto della curva, retta che deve variare "con continuità" al variare del parametro; la (*iii*) serve non solo ad escludere che una parte della curva venga percorsa più di una volta al variare di t in $[a , b]$, ma anche a far sì che la curva sia aperta, ed inoltre che sia *semplice*, cioè priva di "nodi", cioè di punti in cui due o più rami della curva si intersecano. Ad esempio, la curva $\boldsymbol{r}(t) = (t^2 , t^3 - t)$ con $-2 \leq t \leq 2$ non è regolare; infatti le condizioni (*i*) e (*ii*) sono verificate (nell'unico punto in cui $x'(t) = 0$ si ha $y'(t) = -1$), ma la (*iii*) non è vera, in quanto sia per $t = 1$ sia per $t = -1$ si ha $\boldsymbol{r}(t) = (1 , 0)$. In effetti la curva, che ha equazione cartesiana $y^2 - x^3 + 2x^2 - x = 0$, presenta un nodo nel punto $(1 , 0)$, come si vede facilmente tracciando i grafici delle due funzioni $y = \pm(x-1)\sqrt{x}$ che si ottengono esplicitando tale equazione.

In realtà, in molte applicazioni si ha a che fare con curve chiuse, cioè tali che risulta $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$; Come si vedrà in seguito, ai fini della definizione di integrale curvilineo questo non causa grossi problemi, tuttavia a rigore una curva chiusa non deve essere ritenuta regolare, ma semmai "generalmente regolare", secondo una definizione che verrà precisata successivamente.

4.2 - Significati geometrici e fisici

Sappiamo che l'equazione $P = \boldsymbol{r}(t)$, dove $\boldsymbol{r}$ è una funzione a valori vettoriali di componenti $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$, definisce una curva in $\mathbb{R}^n$, in particolare una curva nel piano cartesiano oppure nello spazio tridimensionale se n è rispettivamente 2 o 3. Tralasciamo ora per un momento le ipotesi di regolarità, e consideriamo una generica funzione $\boldsymbol{r}(t)$, definita su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{R}^n$, il cui grafico è una curva $\mathscr{C}$ nello spazio ad n dimensioni; fissato $t_0 \in I$, ad esso corrisponde sulla curva $\mathscr{C}$ un punto P_0 avente coordinate uguali alle componenti $x_1(t_0)$, ..., $x_n(t_0)$ del vettore $\boldsymbol{r}(t_0)$; analogamente, preso un numero reale non nullo h tale che $\boldsymbol{r}$ sia definita anche in $t = t_0 + h$, ad esso corrisponde un punto P avente coordinate uguali alle componenti del vettore $\boldsymbol{r}(t_0 + h)$. Essendo anche $P \in \mathscr{C}$, la retta P_0P è *secante* rispetto



a $\mathscr{C}$: precisamente, il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ è dato da $\boldsymbol{r}(t_0 + h) - \boldsymbol{r}(t_0)$, per cui il rapporto $\dfrac{\boldsymbol{r}(t_0+h)-\boldsymbol{r}(t_0)}{h}$ dà un vettore parallelo alla retta P_0P. Ora supponiamo che per $h \to 0$ questo rapporto tenda ad un certo vettore $\boldsymbol{b}$; poiché P si avvicina a P_0, si ottiene un vettore *tangente* alla curva $\mathscr{C}$ nel punto P_0: perciò la retta tangente a $\mathscr{C}$ nel punto P_0 si può definire come la retta r passante per P_0 e parallela al vettore $\boldsymbol{b}$. Ma $\boldsymbol{b}$ non è altro che la derivata di $\boldsymbol{r}$ nel punto t_0, perciò la retta tangente alla curva si può definire solo nei punti in cui la funzione $\boldsymbol{r}$ è derivabile. In realtà, perché la definizione di retta tangente abbia senso occorre anche che $\boldsymbol{r}'(t_0)$ non sia il vettore $\mathbf{0}$, il che giustifica la condizione (*ii*) di regolarità.

Come esempio, si consideri la circonferenza di equazioni parametriche $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t, \end{cases}$ per la quale si ha $\begin{cases} x' = -\operatorname{sen} t \\ y' = \cos t. \end{cases}$ Osserviamo allora che per ogni t i vettori $\boldsymbol{r}(t)$ ed $\boldsymbol{r}'(t)$ sono ortogonali (d'altra parte si è già visto che in generale ciò accade quando $|\boldsymbol{r}(t)|$ è costante), cosicché ritroviamo la nota proprietà di Geometria elementare per la quale in ciascun punto la tangente ad una circonferenza è perpendicolare al raggio; se invece consideriamo ad esempio l'elica cilindrica di equazioni $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \\ z = t, \end{cases}$ troviamo $\begin{cases} x' = -2\operatorname{sen} t \\ y' = 2\cos t \\ z' = 1, \end{cases}$ cosicché il vettore tangente ha in ciascun punto la stessa componente verticale.

Oltre al vettore tangente $\boldsymbol{r}'(t)$, definiamo anche il *versore tangente* $\boldsymbol{\tau}(t)$ nel generico punto $\boldsymbol{r}(t)$ della curva: basta porre $\boldsymbol{\tau}(t) = \dfrac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$.

Osserviamo ora che una stessa curva $\mathscr{C}$ può avere diverse rappresentazioni parametriche; ad esempio, le equazioni $\begin{cases} x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ y = \dfrac{2u}{1+u^2} \end{cases}$ con $u \in [-1 , 1]$ danno la semicirconferenza di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 1$ giacente nel semipiano delle ascisse non negative, esattamente come le equazioni $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ con $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. In generale, data la rappresentazione parametrica di $\mathscr{C}$ $\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ \dots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}$ con $t \in [a , b]$, si consideri una funzione $t(u)$ derivabile con derivata di segno costante al variare di u in un intervallo $[c , d] \subset \mathbb{R}$, e tale che il codominio di $t(u)$ coincida con $[a , b]$, per cui la funzione $t(u)$, derivabile insieme alla sua inversa, pone in corrispondenza biunivoca i due intervalli $[a , b]$ e $[c , d]$; è chiaro allora che le equazioni $\begin{cases} x_1 = x_1(t(u)) \\ x_2 = x_2(t(u)) \\ \dots \\ x_n = x_n(t(u)) \end{cases}$ con $u \in [c , d]$ definiscono lo stesso arco di curva $\mathscr{C}$: ad esempio, nel caso visto prima la funzione $t(u)$ è uguale a $2 \operatorname{arctg} u$. Ora, è ovvio aspettarsi che con questo cambio di rappresentazione la retta tangente rimanga la stessa, perché geometricamente la retta tangente dipende dalla curva, ma non dal modo in cui la si rappresenta; effettivamente, posto $\boldsymbol{s}(u) = \boldsymbol{r}(t(u))$, la derivata di $\boldsymbol{s}(u)$ rispetto ad u è $\boldsymbol{r}'(t(u))t'(u)$: supponendo che nel punto $t = t(u)$ la derivata $\boldsymbol{r}'$ non sia il vettore $\mathbf{0}$, osserviamo che essa viene semplicemente moltiplicata per lo scalare $t'(u)$, per ipotesi diverso da zero, per cui la retta tangente non cambia. Però il versore tangente diventa ora $\dfrac{\boldsymbol{r}'(t(u))t'(u)}{|\boldsymbol{r}'(t(u))t'(u)|}$, che è lo stesso versore $\boldsymbol{\tau}$ definito prima moltiplicato per il fattore $\dfrac{t'(u)}{|\,t'(u)\,|} = \operatorname{sgn} t'(u)$; concludiamo allora che il versore tangente rimane lo stesso oppure si muta nell'opposto a seconda che la funzione $t(u)$ sia crescente o decrescente in $[c\ , d]$.

Da un punto di vista fisico, una rappresentazione di $\mathscr{C}$ del tipo $\boldsymbol{r}(t)$ è estremamente significativa se si interpreta il parametro t come il tempo, in quanto $\boldsymbol{r}(t)$ rappresenta la posizione di un punto in movimento all'istante t; in questo caso quindi la funzione $\boldsymbol{r}(t)$ non solo descrive la traiettoria del punto, ma dà anche la "legge oraria" del moto del punto lungo la traiettoria stessa.

Ripetendo lo stesso ragionamento seguito prima per definire il vettore tangente e la retta tangente ad una curva, consideriamo t_0 e $t_0 + h$ appartenenti all'intervallo I, e definiamo *velocità media* del punto nell'intervallo temporale $[t_0\ , t_0 + h]$ il vettore $\dfrac{\boldsymbol{r}(t_0 + h) - \boldsymbol{r}(t_0)}{h}$, il quale è parallelo alla retta P_0P, dove $P_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$ e $P = \boldsymbol{r}(t_0 + h)$. Se $\boldsymbol{r}$ è derivabile nel punto t_0, si può definire un vettore $\boldsymbol{v}(t_0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\boldsymbol{r}(t_0 + h) - \boldsymbol{r}(t_0)}{h}$, che sarà detto *velocità istantanea* del punto mobile all'istante t_0, e che naturalmente coincide con il vettore tangente definito prima. Se poi $\boldsymbol{v}(t)$ esiste per ogni $t \in I$, possiamo definire (nei punti in cui essa è a sua volta derivabile) il vettore $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{v}'(t) = \boldsymbol{r}''(t)$, detto *accelerazione istantanea* del punto all'istante t.

Un moto descritto dalla funzione $\boldsymbol{r}(t)$ si dice *uniforme* se il vettore velocità $\boldsymbol{v}(t)$ ha modulo costante; si osservi che, contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare, in un moto curvilineo uniforme l'accelerazione in generale non è nulla: infatti il vettore $\boldsymbol{v}(t)$ ha *modulo* costante, ma è in generale un vettore variabile(3). Possiamo solo affermare che in un moto uniforme i vettori $\boldsymbol{v}$ ed $\boldsymbol{a}$

---

3 Solo nel caso del moto *rettilineo* uniforme il vettore $\boldsymbol{v}$ è costante, e pertanto il vettore $\boldsymbol{a}$ è nullo.

sono ortogonali. Ad esempio, il moto descritto da $\boldsymbol{r}(t)$ = (cos t , sen t) è uniforme, giacché in tal caso il vettore $\boldsymbol{v}$ è ($-$sen$t$, cos$t$), che ha modulo 1: qui il vettore $\boldsymbol{a}$ è ($-$cos$t$, $-$sen$t$), che è l'opposto del vettore $\boldsymbol{r}$; per quanto riguarda l'elica di equazioni $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \\ z = t \end{cases}$, troviamo $\begin{cases} x' = -2\operatorname{sen} t \\ y' = 2\cos t \\ z' = 1 \end{cases}$: si tratta ancora di un moto uniforme, in cui il vettore tangente ha sempre la stessa componente verticale; è inoltre $\begin{cases} x'' = -2\cos t \\ y'' = -2\operatorname{sen} t \\ z'' = 0, \end{cases}$, per cui il vettore accelerazione è sempre parallelo al piano xy e diretto verso l'asse z.

Si è osservato sopra che da una rappresentazione parametrica di una curva $\mathscr{C}$ se ne può ottenere un'altra sostituendo il parametro t con un altro parametro u, legato a t da una funzione $t(u)$ derivabile con derivata di segno costante su [c , d], e tale che il suo codominio coincida con [a , b]. Ma, se da un punto di vista geometrico un cambio di parametro non modifica la curva, da un punto di vista fisico è chiaro che, interpretando ora il parametro u come il tempo, le caratteristiche del moto si modificano sostanzialmente, anche se esso si svolge sulla stessa traiettoria. Ad esempio, la funzione a valori vettoriali $\boldsymbol{r}(u) = \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2} \right)$ con $u \in [-1 , 1]$ dà un moto sulla semicirconferenza di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 1$ giacente nel semipiano $x \geq 0$; ma questo moto non è uniforme, come si vede osservando che il vettore $\boldsymbol{v}$ è $\left(\frac{-4u}{(1+u^2)^2}, \frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \right)$, il cui modulo è $\frac{2}{1+u^2}$: perciò la velocità cresce al variare di u tra -1 e 0, ha un massimo per $u = 0$, poi decresce simmetricamente per $0 \leq u \leq 1$. Per quanto è stato osservato prima sull'invarianza della retta tangente, è chiaro che, indipendentemente dalla rappresentazione, il vettore velocità in un punto mantiene sempre la stessa direzione; inoltre esso mantiene anche lo stesso verso, oppure si muta nell'opposto, a seconda che con il cambio di parametro il punto percorra la curva nello stesso verso oppure nel verso opposto, cioè a seconda che $t'(u)$ sia positiva oppure negativa sull'intervallo [c , d].

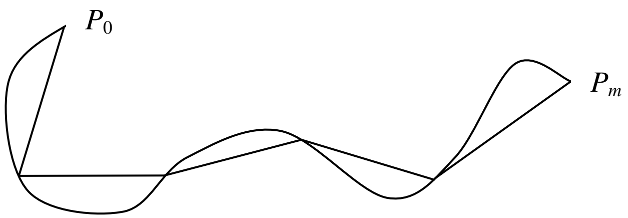
4.3 - Lunghezza di un arco di curva

Prima di trattare gli integrali di campi scalari o vettoriali il cui dominio è un arco di curva in $\mathbb{R}^n$, diamo la definizione di lunghezza di un arco di curva. Per il momento possiamo considerare una curva $\mathscr{C}$ che soddisfi solo in parte le ipotesi di regolarità viste nel par. 4.1: precisamente, supponiamo che valga l'ipotesi (*iii*), cosicché la curva sia semplice, ma sostituiamo le condizioni (*i*) e (*ii*) con la semplice continuità della funzione $\boldsymbol{r}(t)$ sull'intervallo $[a , b]$.

Precisiamo subito che la definizione di lunghezza di un arco di curva non ha nulla a che vedere con la misura di Peano - Jordan vista nel cap. 2: infatti in $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ una curva ha di solito misura n-dimensionale nulla.

Per definire la lunghezza di una curva, si può sfruttare l'idea intuitiva per la quale nessun arco di curva che unisce due punti A e B di $\mathbb{R}^n$ può avere lunghezza minore del segmento AB; consideriamo quindi una suddivisione $\mathscr{P}$ dell'intervallo $[a , b]$ tramite i punti $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_m = b$, ed indichiamo con $P_0, P_1, ..., P_m$ i punti $\boldsymbol{r}(t_0), \boldsymbol{r}(t_1), ... \boldsymbol{r}(t_m)$; consideriamo poi la "poligonale" **P** costituita dai segmenti $P_0P_1, P_1P_2, ..., P_{m-1}P_m$[4], che risulta quindi inscritta nell'arco di curva considerato, e definiamo *lunghezza* della poligonale **P** (che sarà indicata con $|\mathbf{P}|$) la somma delle lunghezze di tali segmenti, cioè:

(4.1) $$|\mathbf{P}| = \sum_{k=1}^{m} \left|\boldsymbol{r}(t_k) - \boldsymbol{r}(t_{k-1})\right| .$$



Facciamo ora variare **P** tra tutte le possibili poligonali inscritte nell'arco $\mathscr{C}$, cioè consideriamo tutte le possibili partizioni $\mathscr{P}$ di $[a , b]$ in un numero finito

---

[4] Come si è visto nel par. 1.5, il concetto di retta (e di segmento) che unisce due punti ha senso anche in $\mathbb{R}^n$.

di intervalli; calcolando per ciascuna poligonale la sua lunghezza, definiamo un certo insieme S di numeri reali non negativi. Possiamo allora definire la **lunghezza dell'arco di curva** $\mathscr{C}$ come segue

$$\Lambda(a\,,b) = \text{lunghezza}\,(\mathscr{C}) = \sup S, \tag{4.2}$$

sempre che tale estremo superiore sia finito. Può infatti accadere che l'insieme S delle lunghezze di tutte le poligonali inscritte in $\mathscr{C}$ sia superiormente illimitato; se dunque S ha un estremo superiore finito la curva $\mathscr{C}$ si dirà **rettificabile**, mentre se ciò non accade essa si dirà **non rettificabile**.

In seguito sarà data una formula che consente di esprimere la lunghezza di un arco di curva tramite il calcolo di un opportuno integrale, visto che l'applicazione "pratica" della definizione è di fatto proibitiva; vediamo intanto un esempio di curva non rettificabile[5].

ESEMPIO 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x} & \text{per } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

che è continua nell'intervallo $[0\,,1]$; il suo grafico si può interpretare come curva in $\mathbb{R}^2$, scrivendo $\boldsymbol{r}(t) = (t\,, f(t))$, con $t \in [0\,,1]$. Suddividiamo l'intervallo $[0\,,1]$ scegliendo $t_0 = 0,\ t_1 = \dfrac{1}{2n},\ t_2 = \dfrac{1}{2n-1}, \ldots,\ t_{2n-1} = \dfrac{1}{2},\ t_{2n} = 1$: abbiamo così determinato una poligonale **P** che congiunge i punti

$$P_0 = (0\,,0)\,,\ P_1 = \left(\frac{1}{2n}, \frac{\cos n\pi}{2n}\right),\ P_2 = \left(\frac{1}{2n-1}, \frac{\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{2}}{2n-1}\right), \ldots,$$

[5] Questo esempio è tratto da T. M. Apostol, *op. cit.*, vol. III, esercizio 22 a pag. 169.

$$P_{2n-2}=\left(\frac{1}{3},\frac{\cos 3\pi/2}{3}\right),\ P_{2n-1}=\left(\frac{1}{2},\frac{\cos\pi}{2}\right),\ P_{2n}=(1\,,0)\,;$$

si ha perciò per i punti con indice dispari $P_{2k-1}=\left(\dfrac{1}{2n+2-2k},\dfrac{(-1)^{n+1-k}}{2n+2-2k}\right)$ per ogni k = 1, 2, ..., n, e per quelli con indice pari $P_{2k}=\left(\dfrac{1}{2n+1-2k},0\right)$ per k = 1, 2, ..., n, mentre per k = 0 è P_0 = (0 , 0).

Ora, per ogni k = 1, 2, ..., n la lunghezza del segmento $P_{2k-1}P_{2k}$ è $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2n+1-2k}-\dfrac{1}{2n+2-2k}\right)^2+\dfrac{1}{(2n+2-2k)^2}} = \dfrac{\sqrt{(2n+1-2k)^2+1}}{(2n+1-2k)(2n+2-2k)}$, che è maggiore di $\dfrac{\sqrt{(2n+1-2k)^2}}{(2n+1-2k)(2n+2-2k)}=\dfrac{1}{2n+2-2k}$, mentre per ogni k = 1, ..., n – 1 è $\overline{P_{2k}P_{2k+1}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2n-2k}-\dfrac{1}{2n+1-2k}\right)^2+\dfrac{1}{(2n-2k)^2}}=$ $=\dfrac{\sqrt{(2n+1-2k)^2+1}}{(2n-2k)(2n+1-2k)}$, maggiore di $\dfrac{\sqrt{(2n+1-2k)^2}}{(2n-2k)(2n+1-2k)}=\dfrac{1}{2n-2k}$; inoltre la lunghezza di P_0P_1 è $\dfrac{1}{n\sqrt{2}}$, che è maggiore di $\dfrac{1}{2n}$. Perciò:

$$|\mathbf{P}|>\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-2}+\cdots+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-4}+\cdots+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

Abbiamo così dimostrato che |**P**| è maggiore della ridotta n-esima della serie armonica; poiché tali ridotte costituiscono una successione illimitata superiormente, non esiste alcun maggiorante per l'insieme delle lunghezze delle poligonali inscritte nella curva: essa pertanto non è rettificabile.

Vediamo ora come si dimostra la formula esplicita per il calcolo della lunghezza di un arco di curva, avvertendo però che essa però non è applicabile ad una qualsiasi curva rettificabile, bensì alle sole curve regolari.

Per prima cosa dimostriamo che la definizione di lunghezza di un arco di curva data in precedenza può essere espressa in un modo leggermente diverso, precisamente utilizzando il concetto di limite. Per ogni partizione $\mathscr{P}$ di $[a\,,\,b]$, si definisca δ (*norma* della partizione $\mathscr{P}$) il massimo di $t_i - t_{i-1}$ ($i = 1, 2, ..., m$); si ha allora il seguente

TEOREMA 26. *Data una curva γ come sopra, si costruisca per ogni suddivisione $\mathscr{P}$ di $[a\,,\,b]$ la corrispondente poligonale* **P**, *e sia p la sua lunghezza. Se esiste finito $\lim\limits_{\delta\to 0^+} p = A$, allora la lunghezza di γ è uguale ad A.*

Dimostrazione. In realtà si potrebbe dimostrare che i due concetti sono del tutto equivalenti, cosicché il suddetto limite fornisce in effetti una *definizione* alternativa della lunghezza di un arco di curva; tuttavia in questo caso interpretiamo l'ipotesi del teorema come una condizione solo sufficiente. In primo luogo, è chiaro che il significato del precedente limite è del tutto analogo a quello specificato nel capitolo 3 per la definizione di integrale multiplo: poiché $|\mathbf{P}|$ non è funzione "univocamente determinata" di δ (nel senso che fissato δ si possono costruire infinite partizioni di $[a\,,\,b]$ di norma δ, e quindi $|\mathbf{P}|$ può assumere infiniti valori), il simbolo $\lim\limits_{\delta\to 0^+}|\mathbf{P}| = A$ significa che ad ogni fissato ε positivo corrisponde un η positivo tale che per tutte le partizioni di $[a\,,\,b]$ di norma $\delta < \eta$ la lunghezza della corrispondente poligonale si discosta da A meno di ε, cioè è compresa tra $A - \varepsilon$ ed $A + \varepsilon$.

Ora, vogliamo dimostrare che è $|\mathbf{P}| \leq A$ per ogni partizione $\mathscr{P}$. A tale scopo occorre premettere un'importante osservazione: sappiamo che vale in $\mathbb{R}^n$ la disuguaglianza triangolare, per cui, se S è la lunghezza di un certo segmento AB, comunque si prenda un terzo punto C la somma delle lunghezze dei segmenti AC e CB sarà maggiore o uguale ad S. Perciò, se effettuando una partizione $\mathscr{P}$ di $[a\,,\,b]$ si ottiene una poligonale **P** avente lunghezza $|\mathbf{P}|$, allora aggiungendo a $\mathscr{P}$ un altro punto (e lasciando invariati gli altri) la lunghezza della nuova poligonale non può essere inferiore a $|\mathbf{P}|$.

Sia quindi per assurdo $|\mathbf{P}| > A$ per una certa partizione $\mathscr{P}$, e sia B un numero compreso tra A e $|\mathbf{P}|$. Posto $\varepsilon = B - A$, per ipotesi esiste un $\eta > 0$ tale che per tutte le partizioni di $[a\,,\,b]$ di norma $\delta < \eta$ si ha $A - \varepsilon < |\mathbf{P}| < A + \varepsilon =$

= B; sia quindi $\mathscr{P}'$ una partizione di $[a\,,\,b]$ di norma minore di η: detta $\mathbf{P}'$ la corrispondente poligonale, si avrà $|\mathbf{P}'| < B$.

Sia ora $\mathscr{P}''$ la partizione che si ottiene prendendo tutti i punti di suddivisione di $\mathscr{P}$ e di $\mathscr{P}'$; essendo $|\mathbf{P}| > A$, per quanto abbiamo osservato prima alla suddivisione $\mathscr{P}''$ deve corrispondere una poligonale di lunghezza maggiore o uguale a $|\mathbf{P}|$, e pertanto sarà $|\mathbf{P}''| > A$. Ma d'altra parte la norma di $\mathscr{P}''$ è minore o uguale a δ (perché già lo è la norma di $\mathscr{P}'$), e pertanto deve essere anche $|\mathbf{P}''| < B$; queste due disuguaglianze danno un assurdo, perché B è minore di A.

Così è stato dimostrato che $|\mathbf{P}| \le A$, cioè che A è un maggiorante per l'insieme delle lunghezze di tutte le poligonali inscritte in γ; il fatto che esso è proprio l'estremo superiore di tale insieme è immediato, in quanto per ogni fissato ε positivo esistono delle partizioni (anzi ne esistono infinite) per le quali risulta $A - \varepsilon < |\mathbf{P}| < A + \varepsilon$. □

Diamo ora la formula esplicita per il calcolo della lunghezza di una curva regolare.

TEOREMA 27. *Data la curva regolare $\mathscr{C}$, definita dalla funzione vettoriale $\boldsymbol{r}(t)$ al variare di t in $[a\,,\,b]$, si ha*

$$\Lambda(a,b) = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt\,. \tag{4.3}$$

Nel caso particolare $n = 2$, posto $\mathbf{r}(t) = (x(t)\,,\,y(t))$, si ha

$$\Lambda(a,b) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt\,, \tag{4.4}$$

mentre nel caso $n = 3$, posto $\mathbf{r}(t) = (x(t)\,,\,y(t)\,,\,z(t))$, si ha

$$\Lambda(a,b) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt\,. \tag{4.5}$$

Dimostrazione. Ci limitiamo per semplicità al solo caso $n = 3$, cioè dimostriamo la (4.5); si vede facilmente che il ragionamento si adatta al caso generale con poche modifiche.

Data la solita partizione $a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b$ dell'intervallo $[a , b]$, la lunghezza p della corrispondente poligonale $\mathbf{P}$ è

$$p = \sum_{k=1}^{m} \sqrt{((x(t_k) - (x(t_{k-1}))^2 + ((y(t_k) - (y(t_{k-1}))^2 + ((z(t_k) - (z(t_{k-1}))^2} .$$

Per le ipotesi di regolarità, possiamo applicare il teorema di Lagrange alla funzione $x(t)$ nell'intervallo $[t_{k-1} , t_k]$: che esiste allora un $\alpha_k \in (t_{k-1} , t_k)$ tale che $x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\alpha_k)\cdot(t_k - t_{k-1})$; analogamente, esistono nello stesso intervallo un β_k tale che $y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\beta_k)\cdot(t_k - t_{k-1})$ ed un γ_k tale che $z(t_k) - z(t_{k-1}) = z'(\gamma_k)\cdot(t_k - t_{k-1})$. Perciò si ha

$$p = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{(x'(\alpha_k))^2 + (y'(\beta_k))^2 + (z'(\gamma_k))^2} , \tag{4.6}$$

dove in generale i tre numeri α_k, β_k, γ_k sono distinti tra loro.

Consideriamo ora l'espressione

$$\sigma = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2 + (z'(\xi_k))^2} , \tag{4.7}$$

dove questa volta ξ_k è un generico elemento di $[t_{k-1} , t_k]$; si osservi che, a differenza di quanto accade nella (4.6), qui ξ_k è lo stesso per le tre funzioni x', y', z'. Naturalmente la (4.7) è una somma integrale relativa alla funzione continua $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ sull'intervallo $[a , b]$, che per $\delta \to 0^+$ tende all'integrale a secondo membro della (4.5). Vogliamo però dimostrare che anche il limite della (4.6) per $\delta \to 0^+$ è lo stesso numero, il che equivale a dimostrare che

$$\lim_{\delta \to 0^+} (p - \sigma) = 0 . \tag{4.8}$$

Essendo γ regolare, le derivate delle tre funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sono continue in $[a, b]$, per cui esse sono uniformemente continue in tale intervallo; perciò, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un numero positivo η tale che comunque si scelgano u e v in $[a, b]$ con $|u - v| < \eta$, risulta

$$(4.9) \qquad \begin{cases} |x'(u) - x'(v)| < \dfrac{\varepsilon}{(b-a)\sqrt{3}} \\ |y'(u) - y'(v)| < \dfrac{\varepsilon}{(b-a)\sqrt{3}} \\ |z'(u) - z'(v)| < \dfrac{\varepsilon}{(b-a)\sqrt{3}}. \end{cases}$$ [6]

Ricordiamo inoltre che, presi comunque in $\mathbb{R}^3$ i due vettori (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2), si ha la disuguaglianza

$$(4.10) \quad \left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} - \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}\right| \le \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}\ ,$$

perché in ogni triangolo un lato è non minore della differenza degli altri due.

Allora, se si considera una partizione $\mathscr{P}$ di $[a, b]$ avente norma δ minore di η, si ha

$$|p - \sigma| =$$
$$= \left|\sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1})\left(\sqrt{(x'(\alpha_k))^2 + (y'(\beta_k))^2 + (z'(\gamma_k))^2} - \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2 + (z'(\xi_k))^2}\right)\right|,$$

che per la disuguaglianza triangolare è minore o uguale a

$$\sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1})\left|\sqrt{(x'(\alpha_k))^2 + (y'(\beta_k))^2 + (z'(\gamma_k))^2} - \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2 + (z'(\xi_k))^2}\right|.$$

---

[6] A parità di ε, il numero η non è in generale lo stesso per le tre funzioni in questione; nella (4.9) si sottintende che si è scelto il più piccolo dei tre, cosicché le tre disuguaglianze (4.9) sono verificate contemporaneamente.