CAPITOLO UNDICESIMO

IL CALCOLO DIFFERENZIALE

Il *calcolo differenziale* di cui in questo capitolo ci occupiamo si basa sul concetto di *derivata*. La derivata di una funzione in un punto, che, come vedremo, è il valore di un particolare limite, ci consentirà, tra l'altro, di definire in modo rigoroso la nozione di *velocità istantanea* e la nozione di *tangente* a una curva in un punto assegnato.

11.1 *Un problema sulla velocità di un punto*

Supponiamo che un punto P si muova su una retta orientata. La posizione di P o, ciò che è equivalente, lo spazio s percorso a partire da un'origine prefissata sulla retta, è una funzione del tempo. Risulta cioè

$$s = f(t).$$

Se t e $t + \Delta t$ sono due istanti diversi, lo spostamento effettuato dal punto P è rappresentato da

$$f(t+\Delta t) - f(t).$$

Quando P si muove sulla retta di moto uniforme il rapporto

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{11. 1}$$

fornisce la velocità costante con cui si muove il punto P. In generale, però, questo rapporto è una funzione del tempo ed esprime la *velocità media* di P nell'intervallo $[t, t+\Delta t]$. E' naturale considerare nella (11.1) il limite per $\Delta t \to 0$ e definire la *velocità istantanea* al tempo t, nel modo seguente

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Così $v(t)$ rappresenta una funzione della variabile t e fornisce la rapidità con la quale il punto P si muove in ogni istante.

11.2 *Definizione di derivata*

L'esempio considerato nel paragrafo precedente contiene le idee essenziali per giungere alla definizione generale di derivata di una funzione.

Supponiamo che una funzione $f(x)$ sia definita su un intervallo (a, b) e sia h un numero diverso da zero scelto con l'unico requisito che anche il punto $x + h$ (h può essere positivo oppure negativo) appartenga ad (a, b). La grandezza h si dice *incremento* della variabile indipendente x.

Quando la variabile indipendente assume il valore $x + h$, cioè quando la x subisce l'incremento h, la funzione assume il valore $f(x + h)$, subendo così l'incremento $f(x + h) - f(x)$. Il rapporto

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

si chiama *rapporto incrementale*. Osserviamo che tale rapporto è definito per valori di h sufficientemente prossimi a zero ma non per $h = 0$. Formuliamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 11.1. Sia f una funzione definita in ogni punto dell'intervallo (a, b). Diciamo che f è *derivabile in un punto* x di (a, b) se esiste il limite seguente:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ .$$

Il valore del limite si chiama **derivata prima** di $f(x)$ e si indica con $f'(x)$. Si ha cioè, per definizione,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ . \tag{11.2}$$

Il simbolo $f'(x)$ introdotto con la (11.2) è molto comodo, poiché ci ricorda che la derivata prima della funzione f è una nuova funzione di x. Esistono comunque altri modi per indicare la derivata: si usa talvolta il simbolo $y'(x)$ (suggerito dalla relazione $y = f(x)$), oppure $\dot{y}$, oppure Df (dove D è detto *operatore di derivazione)* e la *notazione di Leibniz* di cui faremo largo uso nel seguito, dy/dx.

Osserviamo che con le posizioni

$$\Delta x = h, \quad \Delta f = f(x+h) - f(x),$$

la (11.2) può scriversi

(11.3)
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

A volte il limite (11.2) non esiste in un punto x_0, ma esiste il limite destro

(11.4)
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

oppure il limite sinistro

(11.5)
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

In tali circostanze si parla più propriamente di *derivata destra* e *sinistra*. Precisamente, i valori finiti dei limiti (11.4) e (11.5) si dicono rispettivamente *derivata destra* e *derivata sinistra* di f nel punto x_0 e si indicano con i simboli $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$. Chiaramente, se f è derivabile in x_0, si ha

$$f'(x_0) = f_+'(x_0) = f_-'(x_0)\ .$$

Giova ancora aggiungere che in alcune circostanze il dominio $D_{f'}$ della funzione f' può essere incluso nel dominio D_f della funzione f, senza coincidere con esso. All'insieme $D_{f'}$, infatti, appartengono soltanto quei valori di x, appartenenti a D_f nei quali f è derivabile. I valori di $x \in D_f$ in cui f non è derivabile sono detti *punti singolari*.

Passiamo ora a presentare alcuni esempi di derivate.

ESEMPIO 11**.**1. *Derivata della funzione costante.* Sia f una funzione costante:

$$f(x) = k\text{ , per ogni } x \in \mathbf{R}.$$

Vogliamo provare che $f'(x) = 0$. Dobbiamo calcolare il limite del rapporto incrementale (11.2) con $f(x) = k$. Abbiamo:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = 0.$$

Ciò mostra che la funzione costante ha derivata nulla in ogni punto.

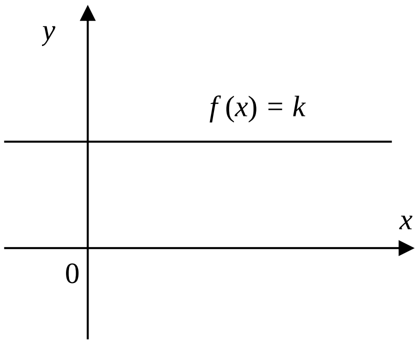

Figura 11.1

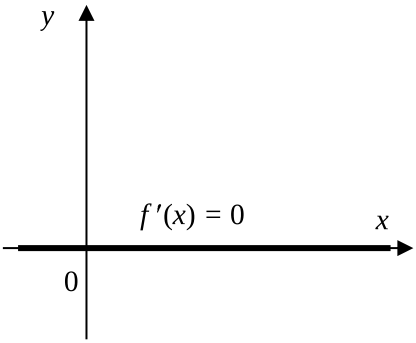

Figura 11.2

ESEMPIO 11.2. *Derivata della funzione lineare*. Sia f così definita:

$$f(x) = mx + n.$$

Si ha

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{m(x+h) + n - (mx+n)}{h} = m\frac{h}{h} = m,$$

e poiché

$$\lim_{h \to 0} m = m,$$

resta provato che la derivata di $f(x) = mx + n$ è

$$f'(x) = m.$$

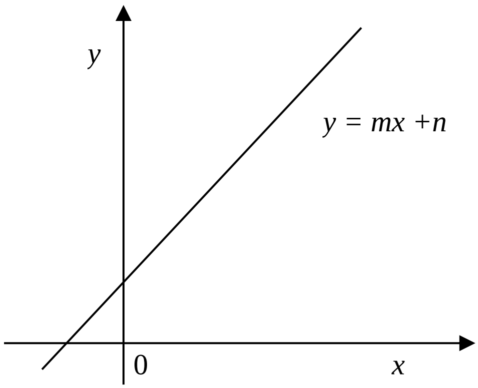

Figura 11.3

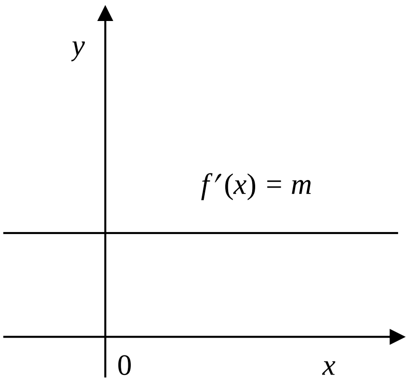

Figura 11.4

ESEMPIO 11.3. Sia $f(x) = x^2$. Vogliamo provare che $f'(x) = 2x$. Per la (11.2) si ha

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

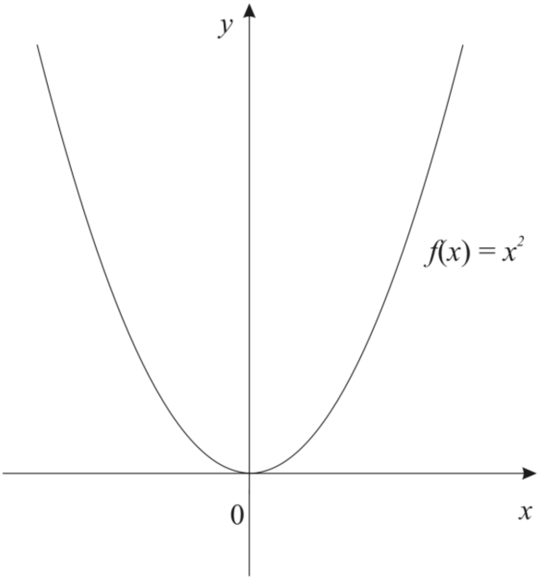

Figura 11.5

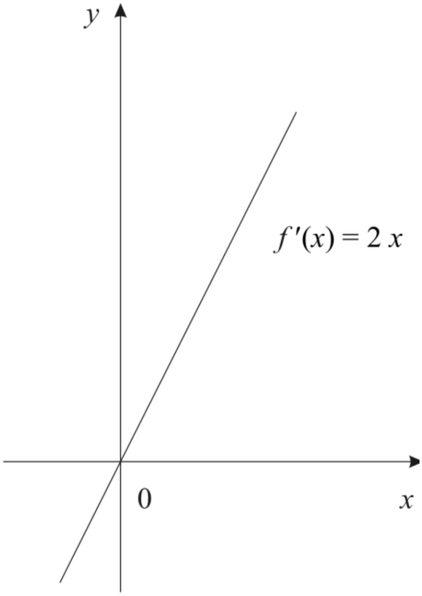

Figura 11.6

Nel paragrafo 11.4, esempio 11.8, generalizzeremo questo risultato mostrando che la funzione $f(x) = x^n$ ha, per ogni valore reale di x, derivata uguale a nx^{n-1}, qualunque sia n intero positivo. Il caso ancora più generale in cui l'esponente è un numero reale verrà esaminato successivamente.

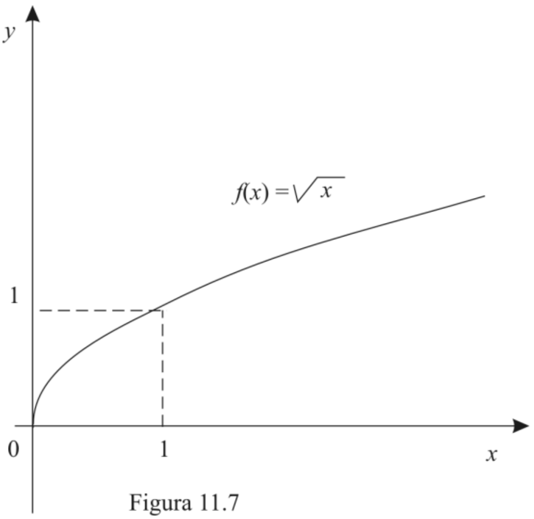

Figura 11.7

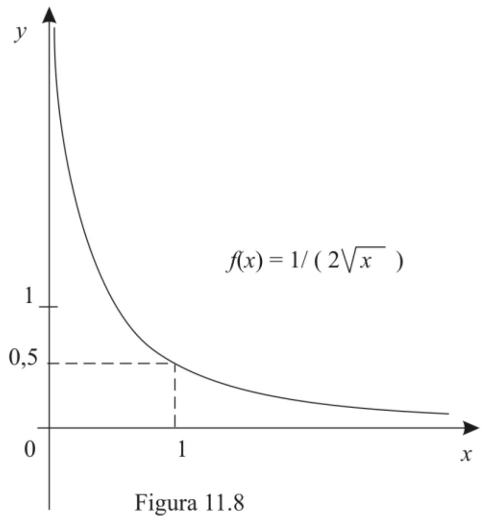

Figura 11.8

ESEMPIO 11.4. Sia $f(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0.$ Proviamo che $f\,'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0.$

Risulta

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \ .$$

Da cui

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Si osservi che $x = 0$ è un punto singolare.

ESEMPIO 11.5. *Derivata della funzione seno.* Sia

$$f(x) = \sin x.$$

Vogliamo provare che

$$f\,'(x) = \cos x.$$

Il rapporto incrementale è:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

che, ricordando le note formule

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2},$$

può scriversi

$$\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Quando $h \to 0$, $\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \to 1$ e $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \to \cos x.$

Ciò basta per concludere che la derivata della funzione seno è la funzione coseno.

ESEMPIO 11.6. *Derivata della funzione coseno*. Se

$$f(x) = \cos x,$$

risulta

$$f\,'(x) = -\sin x\,.$$

Il rapporto incrementale è

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

dove per scrivere il secondo membro ci siamo serviti dell'identità

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}.$$

Abbiamo dunque

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\left[-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]=-\sin x.$$

ESEMPIO 11.7**.** Valutare la derivata della funzione

$$f(x)=\sqrt{1-x^2},\ -1\le x\le 1.$$

Il rapporto incrementale è

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{1+(x+h)^2}-\sqrt{1-x^2}}{h}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1-(x+h)^2}-\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}{h\left(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{-2x-h}{\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}},$$

da cui

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Osserviamo che $f(x)$ è definita sull'intervallo chiuso [–1, 1], mentre $f'(x)$ è definita sull'intervallo aperto (–1, 1); pertanto –1 e 1 sono punti singolari.

ESMPIO 11.8. *Derivata del valore assoluto.* Se

$$f(x) = |x|,$$

allora

$$f'(x)=\frac{x}{|x|}.$$

Non abbiamo bisogno di calcolare il limite del rapporto incrementale. Possiamo evitare questo calcolo, utilizzando il risultato stabilito nell'esempio 2.
Poiché

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{se } x\geq 0 \\ -x, & \text{se } x<0 \end{cases}$$

avremo $f'(x) = 1$, se $x > 0$ e $f'(x) = -1$ se $x < 0$. Dunque

$$f'(x)=\begin{cases} 1, & \text{se } x>0 \\ -1, & \text{se } x<0 \end{cases}.$$

Si osservi che la funzione $|x|$ non è derivabile se $x = 0$. Infatti

$$\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{|h|}{h}=\begin{cases} 1, & \text{se } h>0 \\ -1, & \text{se } h<0 \end{cases}$$

e poiché il limite destro è diverso da quello sinistro, non esiste il limite per $h\to 0$ e quindi $|x|$ non è derivabile in $x = 0$.

La funzione $\frac{x}{|x|}$ si dice *funzione segno di* x e si indica con sgn x. Abbiamo quindi che se $f(x) = |x|$, allora $f'(x)=\frac{x}{|x|}=\operatorname{sgn} x$.

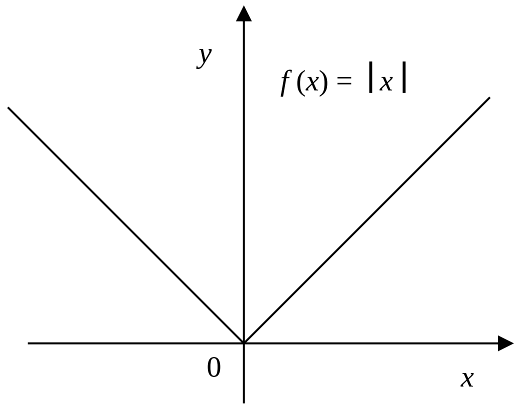

Figura 11.9

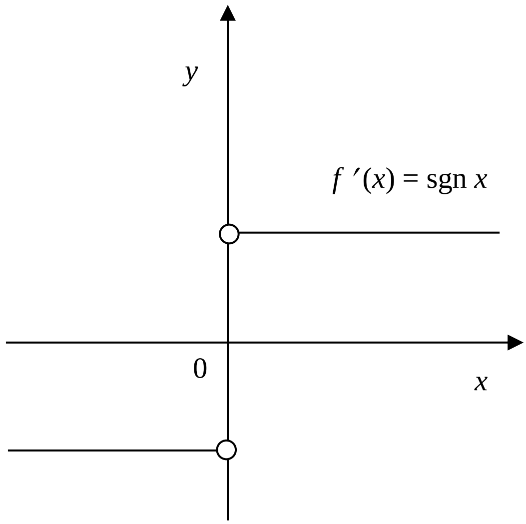

Figura 11.10

11.3 *Continuità delle funzioni derivabili*

Il teorema che segue stabilisce il legame tra le funzioni derivabili e quelle continue.

TEOREMA 11.1. Sia f derivabile in x**.** Allora f è continua in x.

Dimostrazione. Si tratta di provare che

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

A tale scopo conviene riferirsi all'identità

$$f(x+h) - f(x) = h\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{11.6}$$

che è verificata per ogni $h \neq 0$. Il secondo membro può considerarsi il prodotto di due fattori: h e $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Quest' ultimo rappresenta il rapporto incrementale di f.
Per $h \to 0$ il secondo membro della (11.6) tende a $0 \cdot f'(x) = 0$. Perciò anche il primo membro tende a zero e ciò prova la tesi.

Giova osservare che non vale il risultato inverso. Può accadere cioè che una funzione f continua in un punto x non sia ivi derivabile. Questa circostanza si presenta, per esempio, per la funzione $|x|$ nel punto $x = 0$, come abbiamo verificato nell'esempio 8 del paragrafo precedente.

11.4 *Regole di derivazione*

Il risultato che ora presentiamo fornisce lo strumento per calcolare la derivata di somme, differenze, prodotti e quozienti di funzioni.

TEOREMA 11.2. Siano f e g due funzioni derivabili in x. Allora sono derivabili in x anche le funzioni $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$. Lo stesso risultato vale per il quoziente f/g soltanto per quei valori di x in cui g è diversa da zero. Valgono inoltre le seguenti regole di derivazione:

a) $(f+g)' = f' + g'$;

b) $(f-g)' = f' - g'$;

c) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$;

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{[g(x)]^2}$ (regola valida soltanto per quei valori di x in cui $g(x) \neq 0$).

Dimostrazione.

a) Calcoliamo il rapporto incrementale della funzione $f+g$. Abbiamo

$$\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Si ha per definizione

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),\ \ \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$$

e pertanto

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

e ciò prova la prima parte del teorema.

b) La dimostrazione è analoga alla dimostrazione precedente e viene lasciata al lettore.

c) Dobbiamo calcolare il rapporto incrementale della funzione $f\cdot g$. Risulta

$$\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)\,g(x)}{h}=g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

uguaglianza alla quale si perviene aggiungendo e sottraendo la quantità $f(x+h)\,g(x)$ al numeratore del primo membro. Non rimane che passare al limite per $h\to 0$. Il primo addendo a secondo membro tende a $g(x)\,f'(x)$ e il secondo addendo tende a $f(x)\,g'(x)$. Qui abbiamo sfruttato il fatto che $f(x+h)\to f(x)$ per $h\to 0$, una proprietà che equivale alla continuità di f in x. (Ricordiamo che, se f è derivabile in x, allora f è continua in x). La parte c) del teorema è così dimostrata.

Nel caso particolare in cui g si riduce a una costante, ricaviamo la seguente regola di derivazione:

$$(k\,f)'=k\,f',$$

valida comunque si scelga il numero reale k.

d) Per dimostrare la regola di derivazione del quoziente basta calcolare la derivata di $\dfrac{1}{g(x)}$ come limite del rapporto incrementale e quindi applicare la regola di derivazione del prodotto (parte c) del presente teorema) alla funzione $f\,\dfrac{1}{g}$.

Proviamo che risulta

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}, \tag{11.7}$$

nei punti x in cui $g(x) \neq 0$.

Osserviamo intanto che, essendo g derivabile in x, senz'altro g è continua in x. La condizione $g(x) \neq 0$ assicura poi che anche $1/g$ è continua in x. Risulta, pertanto, che

$$\frac{1}{g(x+h)} \to \frac{1}{g(x)} \text{ per } h \to 0.$$

Sia ora $h \neq 0$ e sia $g(x+h) \neq 0$. Il rapporto incrementale di $\dfrac{1}{g(x)}$ è

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right] = -\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \cdot \frac{1}{g(x+h)} \cdot \frac{1}{g(x)}.$$

Si vede subito che il secondo membro tende a $-\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$, per $h \to 0$

e da ciò segue il risultato (11.7).

Applicando la regola di derivazione del prodotto otteniamo

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{f\,g'}{g^2} = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}.$$

La prova del teorema è completa.

ESEMPIO 11.8. Provare che, per ogni intero positivo n, la funzione $f(x) = x^n$ ha derivata $f'(x) = nx^{n-1}$.

Dimostriamo la tesi per induzione. Per $n = 1$, si ha $f(x) = x$ e sappiamo che $f' = 1 = 1 \cdot x^0$. La formula è perciò valida per $n = 1$. Supponiamo ora che essa sia vera per $n = k$ e proviamone la validità per $n = k + 1$. Posto

$$f(x) = x^{k+1}$$

e osservato che

$$f(x) = x \cdot x^k,$$

applichiamo la regola di derivazione del prodotto a questa funzione. Abbiamo

$$f'(x) = 1 \cdot x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1} = (1 + k)\, x^k.$$

Ciò basta per provare la tesi.

ESEMPIO 11.9. Il risultato stabilito nell'esempio precedente unito ai risultati del teorema 2 consentono di ricavare facilmente la regola di derivazione di un qualsiasi polinomio. Per derivare un polinomio calcoliamo la derivata di ogni addendo e sommiamo le derivate. Se

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

allora

$$P'(x) = n\, a_0\, x^{n-1} + (n-1)\, a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}.$$

Osserviamo che la derivata di un polinomio di grado n è un polinomio di grado $n-1$. Per esempio, se

$$P(x) = 8x^6 + 3x^5 - 12x^4 + 6x - 3,$$

abbiamo

$$P'(x) = 48\,x^5 + 15\,x^4 - 48x^3 + 6.$$

ESEMPIO 11.10. Essendo in grado di eseguire la derivata di un quoziente e quella di un polinomio possiamo derivare le funzioni razionali (rapporto tra due polinomi). Per esempio, se

$$f(x) = \frac{6x^3 - 3x^2 + 1}{x^4 - 2x^2 - 5}$$

otteniamo

$$f'(x) = \frac{(18x^2 - 6x)(x^4 - 2x^2 - 5) - (6x^3 - 3x^2 + 1)(4x^3 - 4x)}{(x^4 - 2x^2 - 5)^2} =$$
$$= \frac{-6x^6 + 6x^5 - 12x^4 - 4x^3 - 90x^2 + 34x}{(x^4 - 2x^2 - 5)^2}.$$

Naturalmente il risultato è valido nei punti x in cui f è definita, cioè nei punti in cui $x^4 - 2x^2 - 5 \neq 0$.

Un notevole caso particolare si ha quando

$$f(x) = \frac{1}{x^n},$$

dove n è un intero positivo. In tal caso otteniamo

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}, \text{per } x \neq 0.$$

Questo risultato mostra che la regola di derivazione stabilita nell'esempio 8 si generalizza al caso degli esponenti negativi. Resta provato che, se

$$f(x) = x^n,$$

dove *n è* un intero positivo o negativo, si ha

$$f\,'(x) = n\, x^{n-1}.$$

11.5 *La notazione di Leibniz per la derivata*

Nella notazione di Leibniz la derivata di una funzione y si indica con

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{dy}{dt},\ \ldots$$

se x, t, ... rappresentano le lettere usate per il dominio di y. Per esempio, se $y = x^7$ allora

$$\frac{dy}{dx} = 7\,x^6.$$

I simboli $d\,/dx$, $d\,/dt$, ... si possono anteporre alle funzioni che si vogliono derivare. Per esempio,

$$\frac{d}{dx}(3x^{-3} + 2x^2 - 5) = -9x^{-4} + 4x.$$

Le regole di derivazione della somma, della differenza, del prodotto e del quoziente dimostrate nel paragrafo precedente assumono, con la notazione di Leibniz, la forma seguente:

$$\frac{d}{dx}\; f \pm g \; = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx};$$
$$\frac{d}{dx}\; f \cdot g \; = \frac{d}{dx} f \cdot g + f \cdot \frac{d}{dx} g\,;$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{\frac{d}{dx}f\cdot g-f\frac{d}{dx}g}{g^2},\ g(x)\neq 0.$$

ESEMPIO 11.11. Sia $y = (x-1)(x+2)(x+3)$. Calcolare dy/dx. Possiamo pensare y come prodotto delle due funzioni

$$(x-1)(x+2) \text{ e } x+3$$

e applicare la regola di derivazione del prodotto. Troviamo così

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[(x-1)(x+2)]\cdot(x+3)+(x-1)(x+2)\cdot 1=$$

$$=[(x+2)+(x-1)](x+3)+(x-1)(x+2)=3x^2+8x+1.$$

ESEMPIO 11.12. Calcolare dy/dx nei punti $x = 0$, $x = -2$, dove

$$y=\frac{2x^2}{x^3-1}.$$

Risulta

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x(x^3-1)-2x^2\cdot 3x^2}{(x^3-1)^2}=-2\frac{x^4+2x}{(x^3-1)^2}.$$

Quando $x = 0$, troviamo $dy/dx = 0$. Quando $x = -2$, troviamo $dy/dx = -24/81$.

ESEMPIO 11.13. Sia $y = \tan x$. Abbiamo

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x.$$

Il risultato è valido solo per quei valori di x per i quali cos $x \neq 0$, cioè per

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

In modo analogo troviamo

$$\frac{d}{dx}\cot x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x),$$

valida per quei valori di x in cui sin $x \neq 0$, cioè per

$$x \neq k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

11.6 *Derivata e coefficiente angolare*

In questo paragrafo illustriamo geometricamente il concetto di derivata. Sia f una funzione della quale è riportato il grafico nella figura 11.1.

Prendiamo sul grafico di f due punti A e B rispettivamente di coordinate $(x, f(x))$ e $(x+h, f(x+h))$. Tracciamo dal punto A la parallela all'asse delle ascisse, dal punto B la parallela all'asse delle ordinate e chiamiamo C il punto d'incontro di queste due rette. E' immediato verificare che il segmento BC misura $f(x+h) - f(x)$, che il segmento AC misura h e che l'angolo in C è retto. Detto α l'angolo in A, dalla trigonometria otteniamo

$$\tan \alpha = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

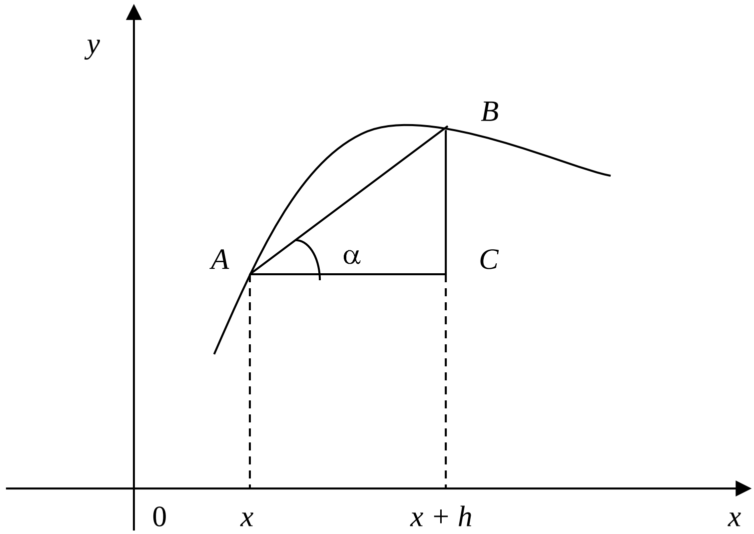

Figura 11.11

Il numero tan α si chiama coefficiente angolare della retta *AB*. Poiché tan α non è definita per $\alpha = \pi / 2$, ricaviamo immediatamente che non esiste il coefficiente angolare delle rette verticali. Ricordiamo che eravamo giunti a questa proprietà già nel capitolo quinto quando abbiamo ricavato l'equazione della retta.

Supponiamo ora che la funzione *f* sia derivabile in *x*. Allora, per definizione, esiste il limite di $[f(x+h) - f(x)] /h$, per $h \to 0$. Evidentemente il coefficiente angolare della retta *AB* tende a $f'(x)$. Il numero $f'(x)$ si chiama **coefficiente angolare della curva nel punto *A*** e la retta che passa per il punto *A* e che ha il coefficiente angolare $f'(x)$ si chiama **retta tangente a *f* in *A***. Dunque l'equazione

$$y - y_0 = f\,'(x_0)\,(x - x_0) \tag{11.8}$$

è l'equazione della retta tangente alla funzione f nel punto di coordinate (x_0, y_0). Un altro concetto che illustriamo brevemente è quello di **retta normale** al grafico della funzione f in un punto A. Definiamo retta normale al grafico della funzione f nel punto A di coordinate (x_0, y_0) la retta perpendicolare alla retta tangente al grafico di f in A. Ricordando dalla geometria analitica che due rette d'equazione $y = m_1 x + b_1$ e $y = m_2 x + b_2$ sono perpendicolari quando $m_1 \cdot m_2 = -1$, si scrive immediatamente l'equazione della retta normale alla curva di equazione $y = f(x)$ in (x_0, y_0):

$$y - y_0 = -\frac{1}{f\,'(x_0)}(x - x_0).$$

Naturalmente questa equazione non ha senso nei punti in cui $f\,'(x_0) = 0$, cioè nei punti a tangente orizzontale.

La definizione ora data di retta tangente ad una curva in un punto si riferisce soltanto a quelle rette tangenti che abbiano un coefficiente angolare finito e perciò *non verticali*. Ciò non significa però che il grafico di una funzione continua non possa avere in un punto tangente verticale.

A tale proposito consideriamo la funzione $f(x) = x^{1/3}$, il cui grafico è mostrato nella figura a fianco.

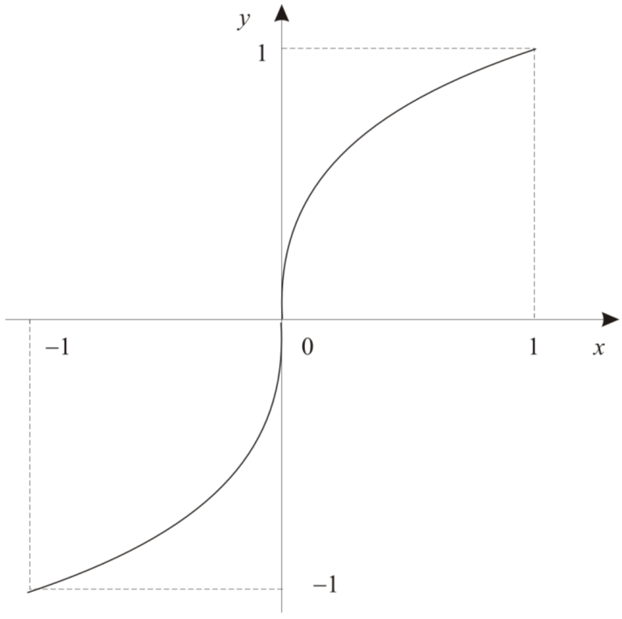

Figura 11.12

Calcoliamo il limite del rapporto incrementale in $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{1/3}}{h} = +\infty.$$

Dunque l'asse y è tangente alla funzione $f(x) = x^{1/3}$ nell'origine.
Consideriamo ora un'altra funzione, $f(x) = x^{2/3}$, il cui grafico è mostrato in figura:

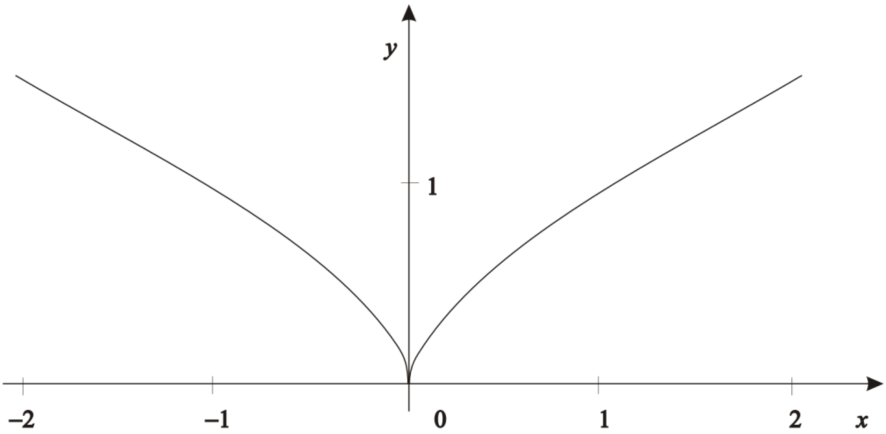

Figura 11.13

e anche in questo caso, calcoliamo il limite del rapporto incrementale in $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{2/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{1/3}}.$$

E' subito visto che questo limite non esiste perché quello destro vale $+\infty$ e quello sinistro vale $-\infty$. In questo caso si dice che la curva ha una *cuspide* nell'origine.
Le considerazioni che abbiamo fatto intorno alle due funzioni $x^{1/3}$ e $x^{2/3}$ ci portano in modo naturale a estendere la definizione di retta tangente come segue.

Sia f una funzione continua nel punto $P(x_0, y_0)$, dove $y_0 = f(x_0)$. Se risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\infty,$$

oppure

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty,$$

allora la retta verticale $x = x_0$ si dice *retta tangente al grafico di f nel punto P*. Se invece

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

non esiste né finito né infinito, allora il grafico di f non ha alcuna retta tangente in P.

I calcoli effettuati mostrano che l'asse delle ordinate è tangente a $y = x^{1/3}$ nell'origine, mentre il grafico di $y = x^{2/3}$ non ha alcuna tangente nell'origine.

ESEMPIO 11.14. Determinare i punti in cui la tangente alla curva di equazione $f(x) = \sqrt{x}$ è parallela alla retta $y = x$.

Poiché il coefficiente angolare della retta $y = x$ è 1, dobbiamo calcolare $f'(x)$ e imporre $f'(x) = 1$. Risulta

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1,$$

da cui $x = 1/4$. Quando $x = 1/4$, troviamo $f(1/4) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Pertanto è possibile costruire la tangente alla curva $f(x) = \sqrt{x}$ soltanto nel punto $A = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

L'equazione della tangente è

$$y - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{4},$$

cioè

$$y = x + \frac{1}{4}.$$

ESEMPIO 11.15. Trovare la retta tangente alla curva $y = x^3$ che passa per il punto A (2 ,0).

Osserviamo che il punto A non appartiene al grafico di x^3. Le rette che passano per il punto A hanno equazione

$$y = m(x - 2)$$

e, al variare di m, varia l'inclinazione di esse. A noi interessa trovare quel valore di m che, sostituito nell'equazione precedente, fa sì che la retta risulti tangente alla $f(x) = x^3$. Abbiamo

$$f'(x) = 3x^2$$

e quindi deve risultare

$$x^3 = 3x^2(x - 2),$$

da cui segue $x = 0$ e $x = 3$. Abbiamo perciò

$$y = 0\,(x - 2),\ \ y = 27(x - 2),$$

cioè

$$y = 0,\ y = 27x - 54.$$

11.7 *Derivazione delle funzioni composte*

Il teorema che segue fornisce un metodo per il calcolo della *derivata delle funzioni composte*, cioè di funzioni che possiamo esprimere nella forma $f(x) = p[q(x)]$.

TEOREMA 11.3. Sia $f(x) = p[q(x)]$. Posto $y = q(x)$, supponiamo che esistano entrambe le derivate $q'(x)$ e $p'(y)$. Allora esiste anche $f'(x)$ e risulta

$$f'(x) = p'(y)\, q'(x), \text{ con } y = q(x).$$

Dimostrazione. Consideriamo il rapporto incrementale di *f:*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{p[q(x+h)]-p[q(x)]}{h}. \tag{11.9}$$

Nell'enunciato del teorema abbiamo già posto $y = q(x)$. L'ulteriore posizione

$$\Delta q = q(x+h) - q(x)=q(x+h) - y$$

fa assumere alla (11.9) la forma seguente:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{p(y+\Delta q)-p(y)}{h}. \tag{11.10}$$

Introduciamo ora la funzione continua

$$\omega(t)=\begin{cases}\dfrac{p(y+t)-p(y)}{t}-p'(y), & \text{se } t\neq 0,\\ 0, & \text{se } t=0,\end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$p(y + t) - p(y) = t\,[\omega(t) + p'(y)].$$

Quando $t = \Delta q$, otteniamo

$$p(y + \Delta q) - p(y) = \Delta q \cdot [\omega(\Delta q) + p'(y)]\ ,$$

che, posto nella (11.10), dà

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\Delta q}{h}\cdot[\omega(\Delta q)+p'(y)].$$

Passando al limite per $h \to 0$ abbiamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta q}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{q(x+h)-q(x)}{h} = q'(x)$$

e

$$\lim_{h\to 0} \omega(\Delta q) = \lim_{h\to 0} \omega(0) = 0,$$

e in definitiva

$$f'(x) = p'(y) \cdot q'(x).$$

La prova del teorema è completa.

Una conseguenza immediata della regola di derivazione delle funzioni composte è la seguente formula:

(11.11)
$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[f(g(x))]^{n-1} g'(x),$$

valida per ogni n intero.
Per ottenere questo risultato poniamo $f(x) = x^n$ e scriviamo

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = \frac{d}{dx} f[g(x)].$$

Dalla regola di derivazione delle funzioni composte ricaviamo

(11.12)
$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

e poiché

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1},$$

abbiamo

$$f'(g(x)) = n\,[g(x)]^{n-1},$$

che, sostituita nella (11.12), dà la formula(11.11).

ESEMPIO 11.16.

$$\frac{d}{dx}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-7} = -7\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-8}\frac{d}{dx}\left(x+\frac{1}{x}\right) =$$
$$= -7\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-8}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$$

Il risultato del teorema 3 si estende facilmente al caso delle funzioni composte da tre funzioni. Si ha:

$$\frac{d}{dx}[f(g(h(x)))] = f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x).$$

E' ovvia l'estensione al caso delle funzioni composte da *n* funzioni.

Vediamo ora un modo diverso di scrivere la formula di derivazione delle funzioni composte, che fa uso della notazione di Leibniz per la derivata. Sia $y = f(t)$ una funzione e supponiamo che sia $t = g(x)$. Allora possiamo esprimere y come funzione di x e scrivere

$$y = f(t) = f(g(x)).$$

Risulta, evidentemente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(g(x))], \quad f'(g(x)) = f'(t) = \frac{dy}{dt}, \;\; g'(x) = \frac{dt}{dx},$$

da cui segue la formulazione delle funzioni composte, scritta con la notazione di Leibniz

(11.13) $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}.$$

ESEMPIO 11.17. Trovare *dy / dx,* dove

$$y=2t^2-1 \text{ e } t=\frac{1}{x}.$$

Possiamo procedere in due modi.
Ilprimo modo consiste nel sostituire 1/*x* al posto di *t* nell'espressione che dà *y*. Si trova così

$$y=\frac{2}{x^2}-1,$$

da cui

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{x^3}.$$

Ilsecondo modo consiste nell'applicare la (11.13), evitando di sostituire *t* nell'espressione di *f*(*t*). Si trova così

$$\frac{dy}{dx}=4t\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{4}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{4}{x^3},$$

che è lo stesso risultato ottenuto per altra via.

La formula (11.13) si estende immediatamente a più variabili. Per esempio, se *x* è una funzione della variabile *u,* abbiamo

(11.14) $$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dx}{du}.$$

La formula (11.14) si riferisce al caso di tre variabili: *x*, *t*, *u*. Il lettore non avrà difficoltà a estendere la (11.14) a un numero arbitrario di variabili.

ESEMPIO 11.18. Calcolare *dy / dx*, essendo

$$y = \sin t,\ \ t = (u+1)^{-7/8}, \quad u = \frac{x+1}{x-1}.$$

Abbiamo

$$\frac{dy}{dt} = \cos t; \quad \frac{dt}{du} = -\frac{7}{8}(u+1)^{-\frac{15}{8}}; \quad \frac{du}{dx} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

e, applicando la (11.14),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{du}\,\frac{du}{dx} = \cos t \cdot \left(-\frac{7}{8}\right)(u+1)^{-\frac{15}{8}} \cdot (-2)\,\frac{1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{7}{4}\,\frac{1}{(x-1)^2} \cdot \left(\frac{2x}{x-1}\right)^{-\frac{15}{8}} \cdot \cos\left(\frac{2x}{x-1}\right)^{-\frac{7}{8}}.$$

ESEMPIO 11.19. Calcolare le derivate delle funzioni $|\sin x|$ e $|\cos x|$.
Ricordando che

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn} x,$$

otteniamo

$$\frac{d}{dx}|\sin x| = [\operatorname{sgn}(\sin x)] \cdot \cos x = \frac{\sin x}{|\sin x|} \cdot \cos x;$$

$$\frac{d}{dx}\sin|x| = \cos|x| \cdot \operatorname{sgn} x = \cos|x| \cdot \frac{x}{|x|}.$$

I grafici delle due funzioni sono riportate nelle figure che seguono.

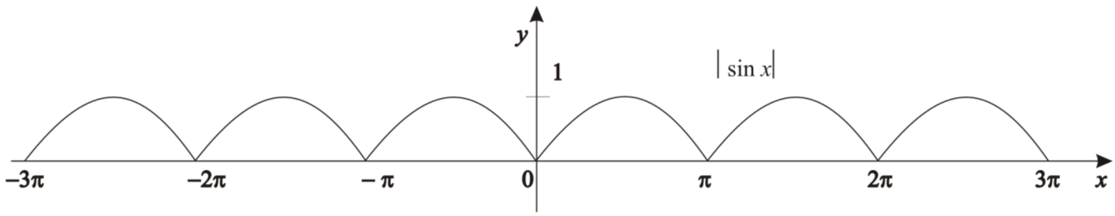

Figura 11.14

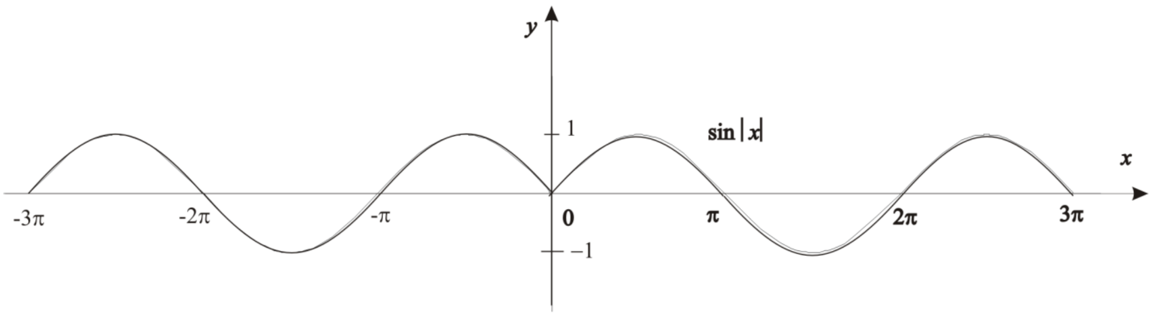

Figura 11.15

Si osservi che la funzione $|\sin x|$ non è derivabile nei punti $x = k\pi$, per qualsiasi intero k, mentre la funzione $\sin |x|$ non è derivabile solo in x=0.

11.8 *Derivazione delle funzioni inverse*

Sia f una funzione invertibile e sia f^{-1} la sua inversa. Supponiamo inoltre che f sia derivabile. Il teorema che segue mostra che anche f^{-1} è derivabile e fornisce la formula di derivazione per f^{-1}.

TEOREMA 11.4. Sia f una funzione continua e strettamente monotona sull'intervallo $[a, b]$. Supponiamo che esista $f'(x)$ in un punto x di (a, b) e che risulti $f'(x) \neq 0$. Allora esiste anche $[f^{-1}(y)]'$ e risulta

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Dimostrazione. Per comodità di notazione poniamo $f^{-1} = g$. Occorre calcolare il limite del rapporto incrementale

(11.15) $$\frac{g(y+h)-g(y)}{h}$$

per $h \to 0$. A tale scopo poniamo

$$k = g(y + h) - g(y),$$

da cui segue

$$x + k = g(y + h).$$

Da questa si ricava immediatamente

$$h = f(x+k) - f(x)$$

e ciò fa assumere al rapporto incrementale (11.15) la forma

(11.16) $$\frac{k}{f(x+k)-f(x)} = \frac{1}{\dfrac{f(x+k)-f(x)}{k}}.$$

Osserviamo che i valori assunti da k sono diversi da zero quando $h \neq 0$. Ciò segue dalla posizione $k = g(y + h) - g(y)$ e dal fatto che, avendo supposto f strettamente monotona, anche $f^{-1} = g$ è tale. Quando h tende a zero anche $k = g(y + h) - g(y)$ tende a zero. (Qui si è usato il fatto che, se f è continua, allora è continua anche f^{-1}. Ciò mostra che, quando $h \to 0$, il secondo membro della (11.16) tende a

$$\frac{1}{f'(x)}$$

da cui segue l'asserto.

Una conseguenza particolarmente notevole del teorema 4 è la formula per il calcolo della derivata della radice n-esima di x.

Si supponga $x > 0$. In tale ipotesi la funzione x^n è strettamente monotona (in particolare strettamente crescente) e quindi invertibile. Vogliamo calcolare la derivata della funzione inversa di x^n, cioè della funzione radice n-esima. Osserviamo intanto che, posto $f(x) = x^n$, risulta $f\,'(x) = nx^{n-1}$ e che, essendo $x > 0$, è $f\,'(x) \neq 0$. Possiamo pertanto applicare il teorema 4. Posto $y = f(x) = x^n$ dal teorema 4 ricaviamo

$$g'(y) = \frac{1}{f\,'(x)} = \frac{1}{n\,x^{n-1}}.$$

Poiché $y = x^n$, segue $x = y^{1/n}$ e quindi

$$g'(y) = \frac{1}{n\,y^{\frac{1}{n}(n-1)}} = \frac{1}{n}\,y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Cambiando la notazione otteniamo

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}, \quad \text{per } x > 0.$$

Osserviamo che la limitazione $x > 0$ può essere rimossa quando n è dispari. In tal caso, infatti, la funzione x^n è strettamente crescente su tutto $\mathbf{R}$ e perciò, quando n è dispari, la formula di derivazione ora provata si estende anche a valori negativi della x.

Come caso particolare otteniamo, per esempio,

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}\,x^{-\frac{6}{7}},$$

dove chiaramente i risultati sono validi soltanto per $x > 0$ nel primo caso e per ogni $x \neq 0$ negli altri due casi.

Occupiamoci ora della derivazione della funzione x^r, dove r è un numero razionale. Esprimiamo r come rapporto di due interi, $r = m / n$, e supponiamo $n > 0$. Il segno di r sarà allora il segno di m. Possiamo scrivere

$$\frac{d}{dx} x^r = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{n}} \right)^m .$$

Abbiamo già mostrato che

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^m = m[g(x)]^{m-1} \frac{d}{dx} g(x).$$

Applicando questo risultato troviamo

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{n}} \right)^m = m\left(x^{\frac{1}{n}} \right)^{m-1} \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{n}} = m\left(x^{\frac{1}{n}} \right)^{m-1} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = r\, x^{r-1}.$$

È possibile estendere la precedente regola di derivazione alle funzioni del tipo $[f(x)]^{m/n}$.

Basta a tale scopo porre $g(x) = x^{m/n}$ e applicare la regola di derivazione delle funzioni composte alla funzione $g[f(x)]$. Otteniamo così

$$\frac{d}{dx}\ f(x)^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}[f(x)]^{\frac{m}{n}-1} \frac{d}{dx} f(x).$$

Le formule di derivazione che abbiamo ricavato si estendono al caso generale in cui r è un numero reale. Tale estensione verrà fatta nel seguito dopo aver definito la funzione logaritmo.

Prima di concludere questo paragrafo vogliamo osservare che la formula di derivazione delle funzioni inverse stabilita nel teorema 4 assume, con la notazione di Leibniz, la forma seguente:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

11.9 *Derivazione delle funzioni trigonometriche inverse*

Le regole di derivazione ottenute ci permettono di ricavare facilmente la formula di derivazione per ciascuna delle funzioni trigonometriche inverse.

Cominciamo dalla funzione

$$y = \arcsin x, \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}.$$

Poiché risulta

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \,,$$

e poiché $\cos x$ è sempre diverso da zero sull'intervallo aperto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, possiamo applicare il teorema 4 di questo capitolo. La funzione arcsin x è dunque derivabile su (–1, 1).
Per calcolare la derivata seguiamo la seguente via. Da

$$y = \arcsin x$$

segue

$$\sin y = x$$

da cui

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1$$

e quindi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Resta dunque stabilita la seguente formula di derivazione:

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1.$$

Il caso della funzione arccos *x* si tratta in modo analogo. Da $y = \arccos x$ segue

$$\cos y = x$$

e derivando

$$-\sin y \frac{dy}{dx} = 1,$$

da cui

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1.$$

Si trova così

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1.$$

Per quanto riguarda la derivata di arctan *x* si trova:

$$y = \arctan x, \ \tan y = x, \quad \frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} = 1,$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Risulta pertanto

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2},\ \forall x \in \mathrm{R}\,.$$

Il compito di ricavare la derivata delle funzioni arcot x, arcsec x e arccosec x è lasciato allo studente. Per calcolare le formule desiderate è conveniente considerare le seguenti equazioni:

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x, \text{ per ogni } x \in \mathbf{R};$$

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos\frac{1}{x}, \text{ per } |x| \geq 1;$$

$$\operatorname{arccosec} x = \arcsin\frac{1}{x}, \text{ per } |x| \geq 1.$$

ESEMPIO 11.20. Calcolare la derivata della seguente funzione

$$f(x) = 2 \arccos (7x^2 - x).$$

Supponiamo che f sia definita per i valori di x per i quali l'equazione ha significato. Otteniamo

$$f'(x) = 2\frac{-1}{\sqrt{1-49x^4+14x^3-x^2}}(14x-1) = 2\frac{1-14x}{\sqrt{1-x^2+14x^3-49x^4}}.$$

11.10 *Derivate di ordine superiore*

Abbiamo visto che a partire da una funzione f è possibile ottenere una nuova funzione f', che abbiamo chiamato *derivata* di f o *derivata prima* di f. Se f' è a sua volta una funzione derivabile, allora possiamo calcolare la sua derivata che denotiamo con f'' e che chiamiamo *derivata seconda* di f. Naturalmente è possibile continuare in questo modo e quindi definire la *derivata terza* (che rappresenta la derivata della derivata seconda) e così via. In generale la derivata n-esima di f, che indichiamo con $f^{(n)}$, è la derivata prima della $f^{(n-1)}$.

Nella notazione di Leibniz le derivate di ordine superiore di $y = f(x)$ si scrivono

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right), \ . \ . \ . \ , \ \frac{d^n}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{\,n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

ESEMPIO 11.21. All'inizio del capitolo abbiamo osservato che il concetto di derivata prima è legato a quello di velocità. La derivata seconda, invece, è legata a un altro concetto, quello di *accelerazione*. Precisamente, nel caso di un moto rettilineo la derivata seconda della funzione di posizione, cioè la derivata prima della velocità, rappresenta l'accelerazione.

ESEMPIO 11.22. Calcolare la derivata n-esima di

$$y = \frac{1}{x}.$$

Otteniamo

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 2x^{-3}; \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = -6x^{-4}; \quad ....$$

I risultati ottenuti suggeriscono che in generale debba valere la seguente regola per il calcolo della derivata n –esima:

(11. 17) $$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n n! x^{-n-1}.$$

Per dimostrare il risultato, applichiamo il metodo d'induzione.
Abbiamo verificato la formula per $n = 1$. Supponiamo che essa sia valida per $n = k$, proviamola per $n = k+1$. Risulta

$$\frac{d^{\,k+1}y}{dx^{\,k+1}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{\,k}y}{dx^k}\right)=\frac{d}{dx}\left[(-1)^k k!\;x^{-k-1}\right]=(-1)^k k!\frac{d}{dx}x^{-k-1}=(-1)^k k!\;(-k-1)x^{-k-2}=$$

$$=(-1)^{k+1}(k+1)\,x^{-(k+1)-1}$$

e questo è proprio il risultato che assicura che la (11.17) è corretta anche per $n = k + 1$.

ESEMPIO 11.23. Sia

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 6.$$

Determinare per quali valori di x risulta rispettivamente

$$f''(x) = 0,\ f''(x) > 0,\ f''(x) < 0.$$

Derivando $f(x)$ troviamo

$$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 4x$$

e successivamente

$$f''(x) = 12x^2 + 18x + 4.$$

Risolvendo l'equazione

$$f''(x) = 12x^2 + 18x + 4 = 0$$

otteniamo

$$f''(x) = 0 \quad \text{per} \qquad x=\frac{-9\pm\sqrt{33}}{12}$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{per} \qquad x<\frac{-9-\sqrt{33}}{12}\ \text{ e }\ x>\frac{-9+\sqrt{33}}{12}$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{per} \quad \frac{-9-\sqrt{33}}{12} < x < \frac{-9+\sqrt{33}}{12}$$

ESEMPIO 11.24. Trovare una formula generale per il calcolo della derivata n-esima della funzione

$$f(x) = \cos(a\,x + b).$$

Si ha

$$f'(x) = -a \sin(ax + b);$$

$$f''(x) = -a^2 \cos(ax + b) = -a^2 f(x);$$

$$f'''(x) = a^3 \sin(ax + b) = -a^2 f'(x);$$

$$f^{IV}(x) = a^4 \cos(ax + b) = a^4 f(x);$$

$$f^{V}(x) = -a^5 \sin(ax + b) = -a^4 f'(x);$$

.
.
.

I risultati suggeriscono la seguente regola per il calcolo della derivata n-esima della funzione $f(x) = \cos(a\,x + b)$: ogni derivata, dalla terza in poi, è $-a^2$ volte la derivata che la precede di due ordini. Una formula che rispecchia questa regola e che consente il calcolo di f' e f'' è la seguente :

(11.18) $$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k a^n \cos(ax+b), \text{ se } n = 2k \\ (-1)^{k+1} a^n \sin(ax+b), \text{se } n = 2k+1, \ k = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Naturalmente la (11.18) andrebbe provata col metodo di induzione. I dettagli della dimostrazione sono lasciati al lettore.

ESEMPIO 11.25. Il teorema binomiale ci dice che per n intero non negativo risulta

$$(11.19) \qquad (a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k} a^{n-k} b^k + \ldots + b^n .$$

Per mezzo delle derivate di ordine superiore è possibile dare una nuova e relativamente semplice espressione di questo risultato.

Per ogni intero positivo n consideriamo l'identità

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x) \ldots (1+x)$$

dove in ciascuno dei due membri compare un polinomio di grado n. Posto allora

$$(11.20) \qquad (1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n ,$$

andiamo a determinare i coefficienti a_i (= 0, 1, …, n).
Posto $x = 0$ nella (11.20), otteniamo immediatamente $a_0 = 1$. Derivando ripetutamente la (11. 20) ricaviamo

$$n(1+x)^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1},$$

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2},$$

$$n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3} = 2 \cdot 3 a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3},$$

.
.
$$n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n(n-1)(n-2) \ldots 1 \cdot a_n .$$

In ciascuna di queste identità poniamo $x = 0$, ottenendo via via i seguenti valori dei coefficienti:

$$a_1 = n, \; a_2 = \frac{n(n-1)}{2}, \quad a_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}, \; \ldots, \; a_n = 1.$$