Capitolo IX

La Trasformata di Laplace

1. Introduzione e prime proprietà

Questo capitolo è interamente dedicato alla *trasformata di Laplace* ed alla presentazione delle sue principali proprietà. Come risulterà chiaro nel seguito l'uso della trasformata di Laplace consente di affrontare più agevolmente, almeno in certi casi, problemi che riguardano le equazioni differenziali lineari. Precisamente per risolvere equazioni differenziali introduciamo la *trasformata integrale* definita come una relazione che ha la forma seguente

$$F(s) = \int_a^b K(s,t) f(t) dt \tag{1}$$

dove f è una funzione data e $K(s,t)$ una funzione detta *nucleo*.
Nella (1) i limiti di integrazione possono essere infiniti nel qual caso l'integrale a secondo membro è un integrale improprio.
La trasformata di Laplace è una particolare trasformata integrale definita nel modo seguente. Sia f una funzione definita per $t \geq 0$. Allora la trasformata di Laplace è definita dall'equazione

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad . \tag{2}$$

supposto che l'integrale abbia significato per certi valori di s.
Come si vede dalla definizione la trasformata di Laplace si ottiene scegliendo nella (1) $K(s,t) = e^{-st}$. L'integrale a secondo membro della (2) è improprio e va inteso nel modo seguente

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st} f(t)dt .$$

Naturalmente per garantire la convergenza di questo integrale saranno necessarie alcune restrizioni sulla funzione f.
Per denotare la trasformata di Laplace è utile far uso dell'*operatore di Laplace* così definito

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt . \tag{3}$$

Prima di illustrare le proprietà della trasformata di Laplace, è opportuno considerare alcuni esempi corrispondenti a scelte molto semplici della funzione f.

Esempio 1. Sia f la funzione così definita: $f(t) = k$ per $t \geq 0$. Trovare la trasformata di Laplace di f.
Si ha per la (3)

$$\mathscr{L}[k] = F(s) = k\int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{k}{s} , \qquad s > 0 .$$

Osserviamo che la restrizione $s > 0$ è necessaria per assicurare la convergenza dell'integrale.

Esempio 2. Sia $f(t) = t$, $t \geq 0$. Si ha

$$\mathscr{L}[t] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} t dt ,$$

e, dopo un'integrazione per parti

$$\mathscr{L}[t] = F(s) = \left.\frac{te^{-st}}{-s}\right|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}\ , \qquad s > 0.$$

Con due successive integrazioni per parti si ottiene

$$\mathscr{L}\left[t^2\right] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}t^2dt = \frac{2}{s^3}\ , \qquad s > 0$$

e, in generale, vale il risultato

$$\mathscr{L}\left[t^n\right] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}t^ndt = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s > 0, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

che può facilmente stabilirsi con n integrazioni per parti, e dal quale possono ottenersi come caso particolare i risultati ricavati negli esempi precedenti.

Esempio 3. Sia $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$. Risulta

$$\mathscr{L}\left[e^{at}\right] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt = \frac{1}{s-a}\ , \quad \text{per} \quad s > a.$$

Anche in questo caso la restrizione $s > a$ è necessaria per assicurare la convergenza dell'integrale.

Esempio 4. Sia $f(t) = \sin at$, $t \geq 0$. Risulta

$$\mathscr{L}[\sin at] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sin atdt\ , \qquad s > 0.$$

Integrando per parti si ha

$$\left.\frac{e^{-st}\sin at}{-s}\right|_0^\infty + \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos at dt = \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos at dt\,.$$

Qui si è tenuto conto del fatto che la funzione $\sin at$ è limitata e che

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st}\sin at = 0\,, \qquad s > 0.$$

Dopo un'ulteriore integrazione per parti ricaviamo

$$F(s) = \frac{a}{s}\left(\left.\frac{e^{-st}\cos at}{-s}\right|_0^\infty - \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin at dt\right) = \frac{a}{s}\left(\frac{1}{s} - \frac{a}{s}F(s)\right)$$

dalla quale si ottiene

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}\,, \qquad s > 0.$$

Un calcolo analogo fornisce la trasformata di Laplace della funzione $\cos at$:

$$\mathscr{L}[\cos at] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\cos at dt = \frac{s}{s^2 + a^2}\,, \qquad s > 0.$$

Concludiamo questo paragrafo osservando che la trattazione della trasformata può farsi supponendo s numero complesso. Noi qui evitiamo questa generalizzazione perché per i nostri scopi (cioè lo studio e la risoluzione di equazioni differenziali) è sufficiente considerare il caso reale.

2. Ulteriori proprietà della trasformata di Laplace

In questo paragrafo presentiamo alcune ulteriori proprietà della trasformata di Laplace limitando la nostra trattazione a quei risultati utili per la soluzione delle equazioni differenziali.

Teorema 1. *Siano f e g due funzioni delle quali esistono le trasformate di Laplace, rispettivamente per $s > a_1$ e $s > a_2$. Allora, posto*

$$a = \max(a_1, a_2),$$

risulta

$$\mathscr{L}[c_1 f(t) + c_2 g(t)] = c_1 \mathscr{L}[f(t)] + c_2 \mathscr{L}[g(t)]. \tag{1}$$

Dimostrazione. Risulta

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[c_1 f(t) + c_2 g(t)] &= \int_0^\infty e^{-st}\,[c_2 f(t) + c_2 g(t)]\,dt = \\ &= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt = \\ &= c_1 \mathscr{L}[f(t)] + c_2 \mathscr{L}[g(t)]\end{aligned}$$

cioè la tesi del teorema.

Si è soliti enunciare questo risultato dicendo semplicemente che la trasformata di Laplace è un *operatore lineare.*

Richiamiamo ora un risultato sugli integrali impropri che ci sarà utile nella dimostrazione del Teorema 3 che fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza della trasformata di Laplace di una funzione f.

Teorema 2. *Sia M un numero reale positivo e sia f una funzione continua a tratti per $t > a$. Sia inoltre $|f(t)| \leq g(t)$ per $t \geq M$. Allora:*

a) *Se $\int_M^\infty g(t)dt$ converge, allora converge anche $\int_M^\infty f(t)dt$;*

b) *Se $f(t) \geq g(t) \geq 0$ per $t \geq M$ e se $\int_M^\infty g(t)dt$ diverge, allora diverge anche $\int_M^\infty f(t)dt$.*

Prima di enunciare il Teorema 3 premettiamo la seguente definizione.

Definizione. Diciamo che una funzione f è di ordine esponenziale e^{at} se esistono due costanti non negative N e K tali che

$$|f(t)| \leq N e^{at}$$

per ogni $t \geq K$.

Dalla definizione segue che se f è una funzione di ordine esponenziale e^{at} allora essa non cresce più velocemente di $N e^{at}$ per $t \to \infty$.
Il lettore che ha confidenza con i simboli di Landau ha senz'altro osservato che la definizione ora data esprime semplicemente il fatto che

$$f(t) = O(e^{at}), \quad t \to \infty. \tag{2}$$

Teorema 3 (*Esistenza della trasformata di Laplace*). *Sia f una funzione che soddisfa le seguenti condizioni:*

a) *f è continua a tratti per $t \geq 0$;*

b) f è di ordine esponenziale e^{at}, $a > 0$, (vale cioè la (2)).
Allora esiste la trasformata di Laplace $F(s)$ *della funzione f, per ogni* $s > a$.

Dimostrazione. Si tratta di provare la convergenza dell'integrale

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

per $s > a$. Risulta

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^M e^{-st} f(t)dt + \int_M^\infty e^{-st} f(t)dt .$$

Il primo integrale a secondo membro esiste poiché abbiamo supposto f continua a tratti per $t \geq 0$ (ipotesi a)).
Resta soltanto da verificare la convergenza del secondo integrale $\int_M^\infty e^{-st} f(t)dt$. Per fare ciò riferiamoci all'ipotesi b) del Teorema. Abbiamo per $t \geq M$

$$\left| e^{-st} f(t) \right| \leq N e^{-st} e^{at} = N e^{(a-s)t}$$

e perciò per il Teorema 2, affinché $F(s)$ esista, è sufficiente che converga l'integrale $\int_M^\infty e^{(a-s)t} dt$. Ma questo converge per $a - s < 0$, cioè per $s > a$. La dimostrazione del teorema è così completa.
Giova ora fare alcune osservazioni sul teorema ora provato. L'ipotesi b), da sola, non è sufficiente ad assicurare che per una funzione f esista la trasformata di Laplace. Per esempio non esistono le trasformate di Laplace della funzione $1/t$ e della funzione $1/t^2$ che soddisfano la condizione b), ma non la condizione a). D'altro lato la funzione $t^{-1/2}$

che non soddisfa la condizione a) del teorema, ammette la trasformata di Laplace. Ciò non è in contraddizione col Teorema 3 perché questo fornisce soltanto una condizione *sufficiente* per la convergenza di $F(s)$.

Negli esempi presentati nel paragrafo precedente abbiamo calcolato la trasformata di Laplace di alcune funzioni elementari. I teoremi che seguono rappresentano delle proprietà generali delle trasformate di Laplace, che talvolta forniscono trasformate senza far ricorso alla definizione.

Teorema 4. *Sia*

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s), \quad \text{per} \quad s > a.$$

Allora per ogni $b > 0$ *si ha*

$$\mathscr{L}[f(bt)] = \frac{1}{b} F\left(\frac{s}{b}\right), \quad \frac{s}{b} > a. \tag{3}$$

Dimostrazione. Si ha per definizione

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

e quindi

$$F\left(\frac{s}{b}\right) = \int_0^\infty e^{-\frac{s}{b}t} f(t)dt.$$

Posto $t/b = u$ si ottiene

$$F\left(\frac{s}{b}\right) = \int_0^\infty e^{-su} f(bu)bdu = b\mathscr{L}[f(bt)]$$

che è proprio la tesi del teorema.

Teorema 5. *Sia*

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s), \quad s > a.$$

Allora

$$\mathscr{L}\left[e^{bt} f(t)\right] = F(s-b), \quad \text{per} \quad s > a+b$$

dove b è una qualsiasi costante.

Dimostrazione. Si ha

$$F(s-b) = \int_0^\infty e^{-(s-b)t} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{bt} f(t)dt = \mathscr{L}\left[e^{bt} f(t)\right]$$

come dovevasi dimostrare.

Gli esempi che seguono illustrano i risultati ottenuti.

Esempio 1. Trovare la trasformata di Laplace della funzione $e^{bt} \sin at$. Nel paragrafo precedente, esempio 4, abbiamo trovato che la trasformata di Laplace della funzione $\sin at$ è

$$\mathscr{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0.$$

Ora per calcolare la desiderata trasformata, non c'è bisogno di calcolare un nuovo integrale. Basta infatti applicare il Teorema 5. Si trova allora immediatamente

$$\mathscr{L}\left[e^{bt}\sin at\right]=\frac{a}{(s-b)^2+a^2}\,.$$

In maniera analoga, partendo da

$$\mathscr{L}[\cos at]=\frac{s}{s^2+a^2}$$

troviamo subito

$$\mathscr{L}\left[e^{bt}\cos at\right]=\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}\quad .$$

Esempio 2. Calcolare $\mathscr{L}[\cosh at]$.
Si ha

$$\mathscr{L}[\cosh at]=\mathscr{L}\left[\frac{1}{2}e^{at}+\frac{1}{2}e^{-at}\right]=\frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^{at}\right]+\frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^{-at}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{s-a}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+a}=\frac{s}{s^2-a^2},$$

supposto che risulti $s>a$ e $s>-a$, cioè $s>|a|$.
Si osservi che per scrivere i risultati abbiamo prima tenuto conto della proprietà di linearità dell'operatore di Laplace e quindi del fatto che (esempio 3, par. 1)

$$\mathscr{L}\left[e^{at}\right]=\frac{1}{s-a},\quad \text{per}\quad s>a\,.$$

Il risultato che segue fornisce la trasformata di Laplace della funzione $f(t-\tau)$ quando è nota $\mathscr{L}[f(t)]$.

Teorema 6. *Sia τ un numero reale. Allora*

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s}\mathscr{L}[f(t)] + e^{-s\tau}\int_{-\tau}^{0} e^{-st} f(t)dt \quad .$$

Dimostrazione. Risulta

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-\tau)dt \quad .$$

La sostituzione $t-\tau = z$ dà

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)] = \int_{-\tau}^{\infty} e^{-s(z+\tau)} f(z)dz$$

che, ripristinando la variabile t nell'integrale a secondo membro può scriversi

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)] = \int_{-\tau}^{0} e^{-st}e^{-s\tau} f(t)dt + \int_0^{\infty} e^{-st}e^{-s\tau} f(t)dt =$$
$$= e^{-\tau s}\mathscr{L}[f(t)] + e^{-s\tau}\int_{-\tau}^{0} e^{-st} f(t)dt$$

che è proprio la tesi del teorema.
Il risultato diventa particolarmente semplice quando $\tau > 0$ e $f(t) \equiv 0$ per $t < 0$. In tal caso si ha infatti

(4) $$\mathscr{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}\mathscr{L}[f(t)] \ , \quad \tau > 0 .$$

Il risultato che segue si riferisce alle funzioni periodiche.

Teorema 7. *Sia τ un numero reale positivo e per $t \geq 0$ sia $f(t+\tau) = f(t)$, ovvero sia f periodica di periodo τ. Allora*

(5) $$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-s\tau}} \int_0^{\tau} e^{-st} f(t)dt, \qquad s > 0.$$

Dimostrazione. Per provare il risultato poniamo $f(t-\tau) = 0$ per $0 \le t \le \tau$ ed osserviamo che per la periodicità della funzione f risulta $f(t-\tau) = f(t)$, per $t \ge \tau$.
Per la proprietà (4) dimostrata nel teorema precedente otteniamo

$$e^{-st}\mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[f(t-\tau)] = \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \mathscr{L}[f(t)] - \int_0^{\tau} e^{-st} f(t)dt \ ,$$

da cui segue la tesi del teorema.
Osserviamo che se f è continua a tratti allora per la periodicità della f, la trasformata $\mathscr{L}[f(t)]$ esiste per ogni $s > 0$ ed il risultato è valido per ogni $s > 0$.

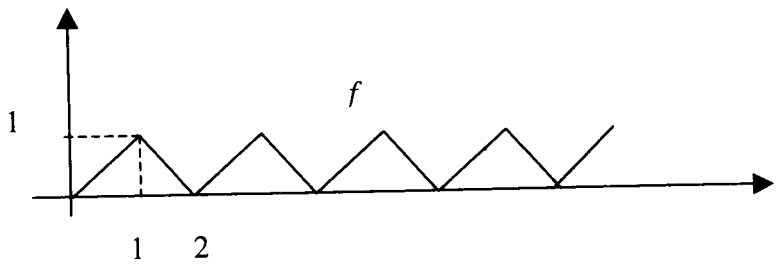
Esempio 3. Sia f la funzione così definita:
a) quando $t \ge 0$ f è periodica con periodo 2;
b) sia inoltre

$$f(t) = \begin{cases} t, & per \quad 0 \le t \le 1 \\ 2-t, & per \quad 1 < t \le 2 \end{cases}.$$

Allora

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})}.$$

Dimostrazione. Il grafico della funzione f, detta *onda triangolare* è illustrato nella figura che segue.



Risulta

$$\int_0^2 e^{-st} f(t)dt = \int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^2 e^{-st}(2-t)dt = \frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s^2}.$$

Da questa relazione, tenendo conto della (5) ricaviamo

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s^2(1-e^{-2s})} = \frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})}$$

che è proprio la tesi da provare.

3. Trasformate di derivate e integrali. Soluzione di alcuni problemi di Cauchy

Lo scopo principale di questo paragrafo è quello di mostrare come l'uso della trasformata di Laplace e delle sue proprietà consenta in alcuni casi di risolvere in modo agevole alcuni problemi a valori iniziali. Il risultato che ora passiamo a stabilire fornisce la relazione tra $\mathscr{L}[f'(t)]$ e $\mathscr{L}[f(t)]$.

Teorema 1. *Siano f e f' rispettivamente una funzione continua e continua a tratti su qualsiasi intervallo $0 \le t \le T$. Si supponga inoltre che esistano tre costanti K, a e N tali che $|f(t)| \le N e^{at}$ per $t \ge K$.*
Allora $\mathscr{L}[f'(t)]$ esiste per $s > a$ e risulta

$$\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0) \quad . \tag{1}$$

Osserviamo che la condizione $|f(t)| \le N e^{at}$ per $t \ge K$ equivale ad asserire che f è di ordine esponenziale e^{at} per $t \to \infty$, ovvero che

$$f(t) = O(e^{at}), \qquad t \to \infty .$$

Dimostrazione. Consideriamo l'integrale

$$\int_0^T e^{-st} f'(t)dt$$

e indichiamo con $t_1, t_2, ..., t_n$ gli n punti dell'intervallo $0 \le t \le T$ in cui f' è discontinua. Risulta allora

$$\int_0^T e^{-st} f'(t)dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t)dt + \cdots + \int_{t_n}^{T} e^{-st} f'(t)dt \quad .$$

Integrando per parti ciascun termine a secondo membro otteniamo

$$e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \cdots + e^{-st} f(t)\Big|_{t_n}^{T} +$$

$$+s\left[\int_0^{t_1} e^{-st} f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t)dt + \cdots + \int_{t_n}^{T} e^{-st} f(t)dt\right] =$$

$$e^{-st_1} f(t_1) - f(0) + e^{-st_2} f(t_2) - e^{-st_1} f(t_1) + e^{-sT} f(T) - e^{-st_n} f(t_n) + \cdots + s\int_0^T e^{-st} f(t)dt =$$

$$e^{-sT} f(T) - f(0) + s\int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

Abbiamo così ricavato

$$\int_0^T e^{-st} f'(t)dt = e^{-sT} f(T) - f(0) + s\int_0^T e^{-st} f(t)dt .$$

Non resta ora che passare al limite per $T \to \infty$. Si ha infatti

$$\lim_{T\to\infty} e^{-sT} f(T) = 0, \quad \text{per } s > a,$$

e quindi

$$\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)$$

che è la tesi del teorema.
Un 'applicazione di questo teorema è data nell'esempio che segue.

Esempio 1. Trovare la trasformata di Laplace della funzione $f(t) = \cos^2 at$.
Si ha

$$f'(t) = -2a\cos at \ \sin at = -a \ \sin \ 2at .$$

Poiché $f(0) = 1$ dalla (1) deduciamo

$$\mathscr{L}[-a \ \sin \ 2at] = s\mathscr{L}\left[\cos^2 at\right] - 1 \quad .$$

e da questa, rilevando il valore di $\mathscr{L}[-a \ \sin \ 2at]$ dalle tavole delle trasformate, otteniamo

$$\mathscr{L}\left[\cos^2 at\right] = -\frac{2a^2}{s^2+4a^2}\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}\frac{s^2+2a^2}{s^2+4a^2} \quad .$$

Se nell'enunciato del Teorema 1 la funzione f e la funzione f' sono sostituite rispettivamente da f' e da f'', si ottiene

$$\mathscr{L}[f''(t)] = s^2\mathscr{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0) . \tag{2}$$

Anzi, i risultati possono estendersi alla trasformata della derivata n-esima di f. Vale allora il seguente risultato generale

Teorema 2. *Siano* $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ *funzioni continue su ogni intervallo* $0 \le t \le T$ *e sia* $f^{(n)}$ *una funzione continua a tratti sul medesimo intervallo. Si supponga inoltre l'esistenza di tre costanti K, a e M tali che*

$$|f(t)| \le N e^{at}, \quad |f'(t)| \le N e^{at}, \quad \ldots,$$
$$\left|f^{(n-1)}(t)\right| \le N e^{at}, \quad \text{per } t \ge K .$$

Allora esiste $\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right]$ *per* $s > a$ *e risulta*