CAPITOLO 2

SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI ◊

2.1 Matrici

2.1.1 Spazi vettoriali

Definizione 2.1.1 Siano X un insieme non vuoto, K un campo. Diciamo che X è uno *spazio vettoriale* (o *lineare*) *sul campo* K se:

- X è munito con un'operazione binaria $+$, chiamata *addizione*, che trasforma ogni $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X \times X$ in uno ed un solo elemento di X, denotato $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, soddisfacente le seguenti condizioni:

(2.1.1) (proprietà commutativa) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \quad \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X \times X$

(2.1.2) (proprietà associativa) $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$

$$= (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} \quad \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in X^3$$

(2.1.3) esiste un elemento $\mathbf{0} \in X$, chiamato *zero*, tale che $\forall \boldsymbol{x} \in X$

◊ A. Maceri, *Sistemi di equazioni lineari*, e-ISBN 978-88-85929-77-7, © Accademica 2021

$$\mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

(2.1.4) $\forall \boldsymbol{x} \in X$ esiste un elemento $-\boldsymbol{x} \in X$, chiamato *opposto* di $\boldsymbol{x}$, tale che $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$;

- X è munita con un'operazione $\cdot$, chiamata *moltiplicazione scalare*, che trasforma ogni $(\alpha, \boldsymbol{x}) \in K \times X$ in uno ed un solo elemento di X, chiamato prodotto di α e $\boldsymbol{x}$, denotato $\alpha \cdot \boldsymbol{x}$ (o $\alpha\boldsymbol{x}$), soddisfacente le seguenti condizioni:

(2.1.5) $\forall (\alpha, \beta, \boldsymbol{x}) \in K \times K \times X \qquad \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{x}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \boldsymbol{x}$

(2.1.6) X contiene un elemento $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$, chiamato *uno* (o *elemento identico),* tale che $\forall \boldsymbol{x} \in X \qquad \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;

- le operazioni di addizione e di moltiplicazione obbediscono alle *leggi distributive*

(2.1.7) $\forall (\alpha, \beta, \boldsymbol{x}) \in K \times K \times X \qquad (\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{x} = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{x}$

(2.1.8) $\forall (\alpha, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in K \times X \times X \qquad \alpha \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \boldsymbol{y}$.

Gli elementi di X sono chiamati *vettori* (o *punti*), mentre gli elementi di K sono chiamati *scalari*. Se $K = \mathbb{R}$, X è chiamato *spazio vettoriale* (o *lineare*) *reale*. ◊

Un importantissimo esempio di spazio vettoriale su un campo è lo *spazio vettoriale* $\mathbb{R}^n$ *sul campo reale*. Precisamente, per ciascun intero positivo n, sia $\mathbb{R}^n$ l'insieme di tutte le n-ple ordinate

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\,,$$

dove $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono numeri reali. Per ciascun $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e per ciascun $\alpha \in \mathbb{R}$, poniamo

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha\, x_n)$$

Sicché $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. E' facile verificare che tali operazioni (addizione di vettori e moltiplicazione di un vettore per uno scalare) soddisfano le leggi commutativa, associativa and distributive, e che lo zero di $\mathbb{R}^n$ (talvolta chiamato *origine* o *vettore nullo*) è il punto $\mathbf{0}$, del quale tutte le coordinate sono pari a zero. Anche facile è la verifica dell'esistenza dell'elemento opposto e dell'elemento identico.

Definizione 2.1.2 Siano

$$x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n})$$
$$x_2 = (x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n})$$
$$\dots$$

$$x_k = \left(x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n}\right)$$

$k \in \mathbb{N}$ vettori di $\mathbb{R}^n$, e $c_1, c_2, \dots, c_k$ siano k numeri reali. Il vettore di $\mathbb{R}^n$

(2.1.9) $$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k$$

è chiamato *combinazione lineare dei vettori* $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_k}$ *con coefficienti* $c_1, c_2, \dots, c_k$. ◊

Osservazione 2.1.1 Ovviamente, con l'usuale notazione $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, l'eguaglianza vettoriale (2.1.9) è equivalente al sistema di k eguaglianze scalari

(2.1.10)
$$\begin{aligned} x_1 &= c_1x_{1,1} + c_2x_{2,1} + \cdots + c_kx_{k,1} \\ x_2 &= c_1x_{1,2} + c_2x_{2,2} + \cdots + c_kx_{k,2} \\ &\dots \\ x_n &= c_1x_{1,n} + c_2x_{2,n} + \cdots + c_kx_{k,n} \ . \end{aligned}$$ ◊

Osservazione 2.1.2 Ovviamente la combinazione lineare di vettori $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_k}$ (comunque scelti) con coefficienti $0, 0, \dots, 0$ è il vettore nullo. ◊

Definizione 2.1.3 Siano $k \in \mathbb{N}$ e $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_k}$ vettori di $\mathbb{R}^n$.

Se la condizione

$$(2.1.11) \qquad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k = 0$$

è verificata solo quando $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$, allora diciamo che i vettori $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_k}$ sono *linearmente indipendenti*. ◊

Definizione 2.1.4 Siano $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_k}$ vettori di $\mathbb{R}^n$, con $k \in \mathbb{N}$. Se esiste $(c_1, c_2, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k - \{\boldsymbol{0}\}$ tale che

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k = 0\,,$$

allora diciamo che i vettori $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_k}$ sono *linearmente dipendenti*. ◊

Osservazione 2.1.3 Chiaramente, il vettore nullo è linearmente dipendente ed ogni vettore non nullo è linearmente indipendente. ◊

Teorema 2.1.1 *Sia X uno spazio vettoriale reale e sia $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ un sistema di vettori di X. Le proposizioni seguenti sono equivalenti:*

1) *i vettori sono linearmente dipendenti*
2) *un vettore è combinazione lineare degli altri.*

Dimostrazione. 1) ⇒ 2). Sia $c_1 \neq 0$ nella (2.1.11). Risulta

$$x_1 = -\frac{c_2}{c_1}x_2 - \cdots - \frac{c_k}{c_1}x_k \ .$$

2) ⇒ 1). Supponiamo che uno dei vettori $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ è combinazione lineare degli altri. Ne segue che i vettori $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_k}$ sono linearmente dipendenti. ◊

Definizione 2.1.5 Diciamo che lo spazio vettoriale reale X è di *dimensione finita* e chiamiamo il numero n *dimensione dello spazio* se esistono n vettori di X linearmente indipendenti, e comunque si scelgano $n+1$ vettori di X questi sono linearmente dipendenti. Si dice che lo spazio ha *dimensione infinita* se, comunque si scelga n, esiste un sistema linearmente indipendente costituito da n vettori dello spazio. ◊

Definizione 2.1.6 Sia X uno spazio vettoriale reale. Chiamiamo *base di* X un sistema di vettori di X tale che

- i vettori del sistema sono linearmente indipendenti
- lo spazio vettoriale X è costituito da tutte le combinazioni lineari di detti vettori. ◊

Teorema 2.1.2 *I vettori coordinati*

(2.1.12) $$\boldsymbol{e_1} = (1,0, \dots ,0)$$

$$\boldsymbol{e_2} = (0,1, \dots ,0)$$
$$\dots$$
$$\boldsymbol{e_n} = (0,0, \dots ,1)$$

sono una base dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Poiché l'equazione vettoriale $c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n = 0$ implica le equazioni scalari

$$c_1 = 0$$
$$c_2 = 0$$
$$\cdots$$
$$c_n = 0 ,$$

i vettori coordinati $e_1, e_2, \dots , e_n$ sono linearmente indipendenti.
Sia $x = (x_1, x_2, \dots , x_n)$ un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^n$. Poiché

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n ,$$

la tesi è vera. ◊

Osservazione 2.1.4 Ogni vettore può essere scritto come combinazione lineare dei vettori della base in uno ed un solo modo. Infatti, se

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$
$$x = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n ,$$

sottraendo membro a membro si ottiene

$$0 = (x_1 - c_1)e_1 + (x_2 - c_2)e_2 + \cdots + (x_n - c_n)e_n .$$

Essendo i vettori della base indipendenti, ogni coefficiente deve essere zero, quindi $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots , \; x_n = c_n$. ◊

Osservazione 2.1.5 Se $\boldsymbol{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$, risulta $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ed i numeri $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono chiamati *coordinate di* $\boldsymbol{x}$ *nella base* $e_1, e_2, \dots, e_n$. ◊

2.1.2 Matrici

Definizione 2.1.7 Siano $m, n \in \mathbb{N}$. Una disposizione rettangolare di numeri reali

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

è chiamata *matrice reale.* Quando $m = n$, la matrice è detta *quadrata* ed il numero m, eguale ad n, è chiamato *ordine* della matrice. Nel caso generale la matrice è detta *rettangolare* (di *dimensioni* $m \times n$). I numeri che costituiscono la matrice sono chiamati *elementi* della matrice. Nella notazione usata per gli elementi, il primo indice denota *sempre* la *riga* che contiene l'elemento ed il secondo indice denota *sempre* la *colonna* che contiene l'elemento. ◊

Definizione 2.1.8 Una matrice rettangolare che consiste in una sola colonna

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

è chiamata *matrice colonna* o *vettore colonna*. ◊

Definizione 2.1.9 Una matrice rettangolare che consiste in una sola riga

$$[a_{i1} \quad \dots \quad a_{in}]$$

è chiamata *matrice riga* o *vettore riga*. ◊

Definizione 2.1.10 Una matrice quadrata di ordine $n \in \mathbb{N}$, in cui tutti gli elementi che non appartengono alla diagonale principale sono nulli

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

è chiamata *matrice diagonale.* ◊

Definizione 2.1.11 Una matrice quadrata di ordine $n \in \mathbb{N}$, in cui tutti gli elementi della diagonale principale sono pari a 1 e tutti gli altri elementi sono zero

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

è chiamata *matrice unità.* ◊

Definizione 2.1.12 Una matrice quadrata in cui tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono zero

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

è chiamata *triangolare alta*. ◊

Definizione 2.1.13 Una matrice quadrata in cui tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono zero

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

è chiamata *triangolare bassa*. ◊

Definizione 2.1.14 Consideriamo la matrice di dimensione $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} .$$

Chiamiamo *trasposta* di A la matrice di dimensione $n \times m$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11}^T & \dots & a_{1m}^T \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^T & \dots & a_{nm}^T \end{bmatrix},$$

dove $a_{ki}^T = a_{ik} \qquad \forall i \in \{1,2,\dots,m\}$ e $\forall k \in \{1,2,\dots,n\}$. ◊

Definizione 2.1.15 Se una matrice quadrata coincide con la sua trasposta, allora essa è detta *simmetrica*. ◊

Osservazione 2.1.6 Sia A una qualsiasi matrice di dimensione $m \times n$. La matrice trasposta A^T ha come prima riga la prima colonna di A,…, come n-esima riga la n-esima colonna di A. ◊

Definizione 2.1.16 Sia A una qualsiasi matrice. Si dice che A è *antisimmetrica* se risulta $A^T = -A$. ◊

Osservazione 2.1.7 In ogni matrice simmetrica gli elementi disposti simmetricamente rispetto alla diagonale principale sono eguali. In ogni matrice antisimmetrica

- due qualsiasi elementi disposti simmetricamente rispetto alla diagonale principale sono eguali in modulo ma di segno opposto
- gli elementi della diagonale principale sono tutti zero. ◊

2.1.3 Operazioni sulle matrici

Definizione 2.1.17 Siano

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

due matrici rettangolari, entrambe di dimensione $m \times n$. Chiamiamo *somma* (o *addizione*) di A e B, la matrice di eguale dimensione, che denotiamo col simbolo $A + B$, i cui elementi sono la somma dei corrispondenti elementi delle matrici date:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}. \diamond$$

Osservazione 2.1.8 In base alla definizione 2.1.17, possono essere sommate soltanto matrici rettangolari di eguale dimensione. ◊

Osservazione 2.1.9 Dalla definizione 2.1.17 segue immediatamente che la matrice addizione ha le proprietà commutativa $(A + B = B + A)$ e associativa $((A + B) + C = A + (B + C))$. ◊

Definizione 2.1.18 Sia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

una matrice rettangolare di dimensione $m \times n$. Chiamiamo *prodotto* (o *moltiplicazione*) di A per $\alpha \in \mathbb{R}$, e denotiamo $\alpha\, A$, la matrice, di eguale dimensione, i cui elementi si ottengono moltiplicando per α i corrispondenti elementi di A :

$$\alpha\, A = \begin{bmatrix} \alpha\, a_{11} & \dots & \alpha\, a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha\, a_{m1} & \dots & \alpha\, a_{mn} \end{bmatrix} . \ \diamond$$

Osservazione 2.1.10 Siano $A\,,B$ due matrici rettangolari di dimensione eguale. E' facile verificare che $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(2.1.13) $$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

(2.1.14) $$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

(2.1.15) $$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)\,.\ \diamond$$

Definizione 2.1.19 Siano

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

due matrici rettangolari, entrambe di dimensione $m \times n$. Chiamiamo *differenza* tra A e B , e denotiamo $A - B$, la matrice di egual dimensione

$$A - B = A + (-1)B\,.\ \diamond$$

Definizione 2.1.20 Siano

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

una matrice rettangolare di dimensione $m \times n$,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nq} \end{bmatrix}$$

una matrice rettangolare di dimensione $n \times q$. Chiamiamo *prodotto* (o *moltiplicazione*) di A per B, e denotiamo AB , la matrice di dimensione $m \times q$

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mq} \end{bmatrix}$$

in cui l'elemento c_{ij} (posto all'intersezione tra la i-esima riga e la j-esima colonna) è la somma dei prodotti degli elementi corrispondenti (della i-esima riga e della j-esima colonna):

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \qquad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \text{e} \quad \forall j \in \{1, \dots, q\} \;. \;\diamond$$

Osservazione 2.1.11 In base alla definizione 2.1.20, l'operazione di moltiplicazione di due matrici rettangolari può essere eseguita soltanto se il numero delle colonne della prima matrice eguaglia il numero delle righe della seconda matrice. ◊

Osservazione 2.1.12 E' facile verificare che la moltiplicazione tra matrici ha le seguenti proprietà

$$(AB)C = A(BC) \tag{2.1.16}$$

$$(A+B)C = AC + BC \tag{2.1.17}$$

$$A(B+C) = AB + AC \; . \; \diamond \tag{2.1.18}$$

Teorema 2.1.3 *Se una matrice rettangolare A (di dimensione* $m \times n$ *) è moltiplicata a destra per una matrice diagonale* $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ *, allora le colonne di* A *sono moltiplicate per* $d_1, d_2, \dots, d_n$ *, rispettivamente.*

Dimostrazione. Infatti

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & \cdots & a_{1n}d_n \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & \cdots & a_{2n}d_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}d_1 & a_{m2}d_2 & \cdots & a_{mn}d_n \end{bmatrix}. \diamond$$

Teorema 2.1.4 *Se una matrice rettangolare A (di dimensione* $m \times n$*) è moltiplicata a sinistra per una matrice diagonale* $\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$*, allora le righe di* A *sono moltiplicate per* $d_1, d_2, \dots, d_m$*, rispettivamente.*

Dimostrazione. Infatti

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & \cdots & d_1a_{1n} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & \cdots & d_2a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_ma_{m1} & d_ma_{m2} & \cdots & d_ma_{mn} \end{bmatrix}. \diamond$$

Teorema 2.1.5 *Sia U una matrice unità di ordine* $n \in \mathbb{N}$*. Allora per ogni matrice quadrata* A *di ordine* $n \in \mathbb{N}$ *risulta*

$$UA = AU = A\,.$$

Dimostrazione. Ovvio. ◊

Teorema 2.1.6 *Siano* A , B *due matrici rettangolari e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Risulta*

(2.1.19) $$(A + B)^T = A^T + B^T$$
(2.1.20) $$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$
(2.1.21) $$(AB)^T = B^T A^T \ .$$

Dimostrazione. Ovvio. ◊

Definizione 2.1.21 Siano A una qualsiasi matrice quadrata di ordine $n \in \mathbb{N}$, U la matrice unità di ordine n . Diciamo che A è *invertibile* se esiste una matrice quadrata B di ordine n tale che

$$AB = BA = U \ .$$

Se A è invertibile, B è chiamata *matrice inversa di* A ed è denotata col simbolo A^{-1} . ◊

Teorema 2.1.7 *Sia* A *una matrice invertibile di ordine* $n \in \mathbb{N}$. *L'inversa di* A *è unica.*

Dimostrazione. Siano B, C due matrici inverse di A . Quindi $AB =$

$BA = U$ e $AC = CA = U$; quindi $C = CU = C(AB) = (CA)B = UB = B$. ◊

Teorema 2.1.8 *Siano A , B due matrici invertibili di ordine $n \in \mathbb{N}$. La matrice AB è invertibile e risulta*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} . \qquad (2.1.22)$$

Dimostrazione. Risulta $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = U$ e $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = U$. Dal teorema 2.1.7 segue $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ◊

2.1 Determinanti

2.2.1 Analisi combinatoria

Definizione 2.2.1 Siano $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Sia A l'insieme costituito da n elementi distinti $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chiamiamo *combinazione degli elementi di A a k a k* ogni sottoinsieme costituito da *k* elementi di A , qualunque sia l'ordine degli elementi. ◊

Definizione 2.2.2 Siano $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Sia A l'insieme costituito da n elementi distinti $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chiamiamo *disposizione degli elementi di* A *su* k *posti* ogni sottoinsieme *ordinato* di A costituito da k elementi. ◊

Definizione 2.2.3 Sia $n \in \mathbb{N}$. Sia A l'insieme costituito da n elementi distinti $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chiamiamo *permutazione di* A ogni disposizione degli elementi di A su n posti. ◊

Osservazione 2.2.1 Si noti che esiste una sola combinazione a n a n degli elementi dell'insieme $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. ◊

Osservazione 2.2.2 Ovviamente ogni permutazione dell'insieme $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ è un allineamento degli elementi $a_1, a_2, \dots, a_n$. ◊

Definizione 2.2.4 Siano $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un insieme costituito da n elementi distinti. Denotiamo con

- $C_{n,k}$ il numero delle *combinazioni a* k *a* k di $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- $D_{n,k}$ il numero delle *disposizioni su* k *posti* di $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- P_n il numero delle *permutazioni* di $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. ◊

Teorema 2.2.1 *Siano* $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, n\}$. *Sia* $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ *un insieme costituito da* n *elementi distinti. Risulta*