CAPITOLO 5

LIMITI E CONTINUITA' [◊]

5.1 Limiti di funzioni reali di una variabile reale

5.1.1 Introduzione

Definizione 5.1.1 Siano $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, X un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Chiamiamo *funzione reale di una variabile reale* (o *funzione a valori reali di una variabile reale*) qualsiasi funzione f *ad un sol valore* che *trasforma* l'insieme X *in* $\mathbb{R}$. Pertanto f è una *legge di corrispondenza* che associa a ciascun elemento x di X un unico numero reale, che denotiamo con il simbolo $f(x)$. L'insieme X è chiamato *dominio* (o *insieme di definizione*) *di* f ed è denotato $domf$. Diciamo anche che f è *definita in* X. Il numero reale $f(x)$ è chiamato *valore* (o *immagine*) di f in x. L'insieme $f(X)$ di tutti i valori di f è chiamato *codominio* di f (o *immagine* di X) ed è anche denotato $rngf$. Se f *trasforma* $X \subseteq \mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$, scriviamo

---

[◊] A. Maceri, *Limiti e Continuità*, e-ISBN 978-88-85929-80-7, © Accademica 2021

$$f: \; X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

o

$$f: \; x \in X \subseteq \mathbb{R} \to f(x) \in \mathbb{R}\,. \;\diamond$$

Osservazione 5.1.1 Ovviamente, nel caso generale, un elemento di $f(X)$ è il valore assunto da f in più elementi di X . ◊

Definizione 5.1.2 Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$ e $f(X) = Y$, diciamo che f è una funzione *da X su Y* . ◊

Osservazione 5.1.2 Una funzione è anche chiamata *trasformazione ad un sol valore* o semplicemente *trasformazione* o *operazione* o *corrispondenza* o *applicazione.* ◊

Osservazione 5.1.3 Sia f una funzione che trasforma $X \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Sia O, x, y , in un piano, un riferimento *Cartesiano* ortogonale. Consideriamo, per ogni $x \in X$, il punto P del piano di ascissa x e ordinata $y = f(x)$. Al variare di x in X , il punto $P = (x, f(x))$ descrive nel piano una curva chiamata *diagramma Cartesiano della funzione* f. Proiettando ortogonalmente il diagramma sull'asse x otteniamo X . Proiettando ortogonalmente il diagramma sull'asse y otteniamo $f(X)$. ◊

Definizione 5.1.3 Sia f una funzione che trasforma $X \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. La funzione

$$\forall x \in X \quad \rightarrow \quad |f(x)| \in [0,+\infty[$$

è chiamata *valore assoluto* di f ed è denotata $|f|$. ◊

Definizione 5.1.4 Siano f_1 una funzione che trasforma $X_1 \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, f_2 una funzione che trasforma $X_2 \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Supponiamo $X = X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

La funzione

$$\forall\, x \in X \quad \rightarrow \quad f_1(x) + f_2(x) \in \mathbb{R}$$

è chiamata *addizione* (*di* f_1 *ed* f_2) ed è denotata $f_1 + f_2$.

La funzione

$$\forall\, x \in X \quad \rightarrow \quad f_1(x) - f_2(x) \in \mathbb{R}$$

è chiamata *sottrazione* (*di* f_2 *da* f_1) ed è denotata $f_1 - f_2$.

La funzione

$$\forall\, x \in X \quad \rightarrow \quad f_1(x) \cdot f_2(x) \in \mathbb{R}$$

è chiamata *moltiplicazione* (*di* f_1 *per* f_2) ed è denotata $f_1 \cdot f_2$.

La funzione

$$\forall\, x \in X - \{x \in X :\ f_2(x) = 0\} \quad \rightarrow \quad \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \in \mathbb{R}$$

è chiamata *divisione* (*di* f_1 *per* f_2) ed è denotata $\frac{f_1}{f_2}$. ◊

Definizione 5.1.5 Una funzione f che trasforma $X \subseteq \mathbb{R}$ in $Y \subseteq \mathbb{R}$ è detta (*monotona*) *crescente* se

(5.1.1) $$\forall\, y, z \in X \qquad y < z \Rightarrow f(y) \leq f(z)\ .\ \diamond$$

Definizione 5.1.6 Una funzione f che trasforma $X \subseteq \mathbb{R}$ in $Y \subseteq \mathbb{R}$ è detta (*monotona*) *strettamente crescente* se

(5.1.2) $$\forall\, y, z \in X \qquad y < z \Rightarrow f(y) < f(z)\ .\ \diamond$$

Definizione 5.1.7 Una funzione f che trasforma $X \subseteq \mathbb{R}$ in $Y \subseteq \mathbb{R}$ è detta (*monotona*) *decrescente* se

(5.1.3) $$\forall\, y, z \in X \qquad y < z \Rightarrow f(y) \geq f(z)\ .\ \diamond$$

Definizione 5.1.8 Una funzione f che trasforma $X \subseteq \mathbb{R}$ in $Y \subseteq \mathbb{R}$ è detta (*monotona*) *strettamente decrescente* se

(5.1.4) $$\forall\, y, z \in X \qquad y < z \Rightarrow f(y) > f(z)\ .\ \diamond$$

Definizione 5.1.9 Sia f una funzione che trasforma $X \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Diciamo che f è una funzione *monotona* se f è monotona crescente oppure monotona strettamente crescente oppure monotona decrescente oppure monotona strettamente decrescente. ◊

Definizione 5.1.10 Sia f una funzione che trasforma $X \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Se

$$\forall\, x\,, z \in X \qquad x \neq z \Rightarrow f(x) \neq f(z),$$

diciamo che f è una funzione *invertibile.* ◊

Osservazione 5.1.4 Sia f una qualsiasi funzione invertibile che trasforma $X \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Ovviamente $\forall y \in f(X)$ esiste uno ed un solo $x \in X$ tale che $f(x) = y$. ◊

Definizione 5.1.11 Sia f una funzione che trasforma $X \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Se f è una funzione invertibile, la funzione (ad un sol valore)

$$\forall\, y \in f(X) \rightarrow \text{l'unico } \; x \in X \; \text{ tale che } \; f(x) = y$$

è chiamata funzione *inversa* della funzione f ed è denotata f^{-1}. ◊

Osservazione 5.1.5 Se $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione invertibile, ovviamente $domf^{-1} = f(X)$ and $rngf^{-1} = X$. ◊

Definizione 5.1.12 Sia f una funzione che trasforma $X \subseteq \mathbb{R}$ su $Y \subseteq \mathbb{R}$. Se f è una funzione invertibile, diciamo che f è una *corrispondenza biunivoca di* $X \subseteq \mathbb{R}$ *su* $Y \subseteq \mathbb{R}$. ◊

Pertanto, dire che f è una corrispondenza biunivoca di X su Y significa semplicemente che ogni elemento di Y è il corrispondente (tramite f) di uno ed un solo elemento di X e che ogni elemento di X è il corrispondente (tramite f^{-1}) di uno ed un solo elemento di Y .

Osservazione 5.1.6 Ovviamente, s e $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione strettamente monotona, allora f è una funzione invertibile. ◊

Definizione 5.1.13 Siano $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$ e $g\colon Y \subseteq \mathbb{R} \to Z \subseteq \mathbb{R}$ due qualsiasi funzioni. Chiamiamo *funzione composta,* e denotiamo $g \circ f$, la funzione

$$x \in X \subseteq \mathbb{R} \to g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) \in Z \subseteq \mathbb{R}. \ \diamond$$

Definizione 5.1.14 Sia $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è una funzione *pari* se

$$(x \in X) \quad \Rightarrow \quad (-x \in X)$$

$$\forall\, x \in X \qquad f(x) = f(-x) \ . \ \diamond$$

Definizione 5.1.15 Sia $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è una funzione *dispari* se

$$(x \in X) \quad \Rightarrow \quad (-x \in X)$$

$$\forall\, x \in X \qquad f(x) = -f(-x)\ . \ \diamond$$

Definizione 5.1.16 Sia $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se esiste $\beta \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq \beta$ per ogni $x \in X$, diciamo che f è *limitata superiormente*, e chiamiamo β *maggiorante di* f. $\diamond$

Definizione 5.1.17 Sia $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha \leq f(x)$ per ogni $x \in X$, diciamo che f è *limitata inferiormente*, e chiamiamo α *minorante di* f. $\diamond$

Definizione 5.1.18 Sia $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f ha un maggiorante ed un minorante, diciamo che f è una funzione *limitata*. $\diamond$

Definizione 5.1.19 Sia $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Chiamiamo *massimo* di f, e denotiamo $\max f$ (oppure $\max\limits_{x \in X} f(x)$), un elemento di $f(X)$ tale che $\max f$ è un maggiorante di f. $\diamond$

Osservazione 5.1.7 Sia $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ovviamente f ammette al più un massimo. $\diamond$

Definizione 5.1.20 Sia $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Chiamiamo *minimo* di f, e denotiamo $\min f$ (oppure $\min\limits_{x \in X} f(x)$), un elemento di $f(X)$ tale che $\min f$ è un minorante di f. $\diamond$

Osservazione 5.1.8 Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ovviamente f ammette al più un minimo. ◊

Abbiamo dimostrato nel capitolo 1 che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ ha la proprietà della *completezza*, cioè che :

- Sia B un qualsiasi sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, non vuoto e limitato superiormente. Allora *esiste il minimo dei maggioranti di* B. In altre parole, esiste uno ed un solo numero reale e'', detto *estremo superiore di* B e denotato con il simbolo $\sup B$, tale che:
    - e'' è un maggiorante di B
    - $\forall\, \varepsilon \in \,]0, +\infty[\quad \exists\, b \in B \,:\, b > e'' - \varepsilon$.

- Sia A un qualsiasi sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, non vuoto e limitato inferiormente. Allora *esiste il massimo dei minoranti di* A. In altre parole, esiste uno ed un solo numero reale e', detto *estremo inferiore di* A e denotato con il simbolo $\inf A$, tale che:
    - e' è un minorante di A
    - $\forall\, \varepsilon \in \,]0, +\infty[\quad \exists\, a \in A \,:\, a < e' + \varepsilon$.

Definizione 5.1.21 Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, f limitata superiormente. Chiamiamo *estremo superiore* (o *minimo dei maggioranti*) *di* f, e denotiamo

$$\sup f \qquad \left(\text{oppure} \quad \sup_{x \in X} f(x)\right)$$

il numero reale $\sup f(X)$. Ovviamente, $\sup f$ è tale che

(5.1.5) $\sup f$ è un maggiorante di f

(5.1.6) $\forall\, \varepsilon \in\,]0,+\infty[$ esiste $\bar{x} \in X$ tale che $f(\bar{x}) > (\sup f) - \varepsilon$. ◊

Osservazione 5.1.9 Siano $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, f limitata superiormente. Evidenziamo che il numero reale $\sup f$ può appartenere o non appartenere a $f(X)$. ◊

Osservazione 5.1.10 Siano $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, f limitata superiormente. Ovviamente f ha uno, ed un solo, estremo superiore. ◊

Definizione 5.1.22 Siano $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, f limitata inferiormente. Chiamiamo *estremo inferiore* (o *massimo dei minoranti*) *di* f, e denotiamo

$$\inf f \qquad (\text{oppure} \quad \inf_{x\in X} f(x)\,)$$

il numero reale $\inf f(X)$. Ovviamente, $\inf f$ è tale che

(5.1.7) $\inf f$ è un minorante di f

(5.1.8) $\forall\, \varepsilon \in\,]0,+\infty[$ esiste $\bar{\bar{x}} \in X$ tale che $f(\bar{\bar{x}}) < (\inf f) + \varepsilon$. ◊

Osservazione 5.1.11 Siano $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, f limitata inferiormente. Evidenziamo che il numero reale $\inf f$ può appartenere o non appartenere a $f(X)$. ◊

Osservazione 5.1.12 Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, f limitata inferiormente. Ovviamente f ha uno, ed un solo, estremo inferiore. ◊

Abbiamo visto nel capitolo 1 che è opportuno aggiungere ad $\mathbb{R}$ due nuovi elementi, *che non sono numeri reali*. Tali elementi, chiamati *infinito* e *meno infinito*, sono due simboli. Essi, rispettivamente, sono denotati $+\infty$ (o semplicemente ∞) e $-\infty$. L'insieme

$$[-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

è chiamato *insieme ampliato dei numeri reali*.
Inoltre, per tali simboli, abbiamo convenuto che

(5.1.9) $\quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad -\infty < x < +\infty$

(5.1.10) $\quad +\infty + \infty = +\infty$

(5.1.11) $\quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty - \infty = -\infty$

(5.1.12) $\quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad x + (+\infty) = (+\infty) + x = x - (-\infty) = +\infty$

(5.1.13) $\quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad x + (-\infty) = (-\infty) + x = x - (+\infty) = -\infty$

(5.1.14) $\quad (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

(5.1.15) $\quad (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

(5.1.16) $\quad \forall x \in \,]0, +\infty[\qquad (+\infty) \cdot x = x \cdot (+\infty) = +\infty$

(5.1.17) $\forall x \in \,]0,+\infty[\qquad (-\infty)\cdot x = x\cdot(-\infty) = -\infty$

(5.1.18) $\forall x \in \,]-\infty,0[\qquad (+\infty)\cdot x = x\cdot(+\infty) = -\infty$

(5.1.19) $\forall x \in \,]-\infty,0[\qquad (-\infty)\cdot x = x\cdot(-\infty) = +\infty$

(5.1.20) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$.

Osservazione 5.1.13 Evidenziamo che *non abbiamo definito* $+\infty - \infty = +\infty + (-\infty)$, $-\infty + \infty$, $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$. ◊

Definizione 5.1.23 Se $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è non limitata superiormente, diciamo che $+\infty$ è *l'estremo superiore di* f e scriviamo

$$\sup f = +\infty \ . \ \diamond$$

Definizione 5.1.24 Se $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è non limitata inferiormente, diciamo che $-\infty$ è *l'estremo inferiore di* f e scriviamo

$$\inf f = -\infty \ . \ \diamond$$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Per la definizione 3.1.8 del capitolo 3, ogni *intorno di* x_0 è un *aperto* N_{x_0} tale che

(5.1.21) $$N_{x_0} \subseteq \mathbb{R} \ , \qquad x_0 \in N_{x_0} \ .$$

Sia $x_0 = +\infty$. Per la definizione 3.2.2 del capitolo 3, ogni *intorno* *di* x_0 è un *aperto* N_{x_0} tale che

(5.1.22) $$N_{x_0} =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \ , \quad \text{dove } a \in \mathbb{R} \ .$$

Sia $x_0 = -\infty$. Per la definizione 3.2.2 del capitolo 3, ogni *intorno di* x_0 è un *aperto* N_{x_0} tale che

(5.1.23) $$N_{x_0} =]-\infty, b[\ = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}\ , \quad \text{dove } b \in \mathbb{R} \ .$$

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un *punto di accumulazione per* X. Per la definizione 3.1.12 del capitolo 3, per *ogni* intorno N_{x_0} di x_0 risulta

(5.1.24) $$N_{x_0} \cap X - \{x_0\} \neq \emptyset \, .$$

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia il simbolo $x_0 = +\infty$ un *punto di accumulazione* (*all'infinito*) *per* X. Per la definizione 3.3.3, per *ogni* intorno N_{x_0} di x_0 risulta

(5.1.25) $$N_{x_0} \cap X \neq \emptyset \, .$$

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia il simbolo $x_0 = -\infty$ un *punto di accumulazione* (*all'infinito*) *per* X. Per la definizione 3.3.3, per *ogni* intorno N_{x_0} di x_0 risulta

(5.1.26) $$N_{x_0} \cap X \neq \emptyset\,.$$

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ un *punto di accumulazione* (*al finito* o *all'infinito*) *per* X. Per le (5.1.24), (5.1.25), (5.1.26), per *ogni* intorno N_{x_0} di x_0 risulta

(5.1.27) $$N_{x_0} \cap X - \{x_0\} \neq \emptyset\,.$$

Osservazione 5.1.14 Ogni punto di accumulazione al finito (cioé, appartenente ad $\mathbb{R}$) per l'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ può essere oppure non essere un punto di X. Infatti, ragionando come nella osservazione 3.2.2, è facile verificare che 0 e 1 sono entrambi punti di accumulazione dell'insieme $[0,1[\, \subseteq \mathbb{R}$. ◊

5.1.2 Limiti

Definizione 5.1.25 Siano

- $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali, di dominio $X \subseteq \mathbb{R}$
- $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
- $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ un punto (al finito o all'infinito) di accumulazione per X.

Diciamo che f *tende ad* l (o che *ha limite* l) per x che *tende* a x_0 , e scriviamo

(5.1.28) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se per *ogni* intorno N_l di l *esiste* un intorno N_{x_0} di x_0 tale che per *ogni* $x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}$ risulta $f(x) \in N_l$. Tale condizione si può esprimere, equivalentemente, in simboli come segue:

(5.1.29) $$\forall \, N_l \quad \exists \, N_{x_0} \ : \ \big(x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}\big) \Rightarrow (f(x) \in N_l) \ . \ \diamond$$

Definizione 5.1.26 Siano

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali, di dominio $X \subseteq \mathbb{R}$
- $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
- $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ un punto (al finito o all'infinito) di accumulazione per X.

Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \, .$$

Se $l \in \mathbb{R}$, diciamo che f *converge ad* (o *verso*) l *per* x *tendente* (o *che tende*) *ad* x_0 .

Se $l = +\infty$, diciamo che f *diverge positivamente per* x *tendente* (o *che tende*) *ad* x_0 .

Se $l = -\infty$, diciamo che f *diverge negativamente per* x *tendente* (o *che tende*) *ad* x_0 .
In ciascuno di questi tre casi, diciamo che f è *regolare in* x_0 . ◊

Osservazione 5.1.15 Se nella (5.1.28) $l \in \{-\infty, +\infty\}$, diciamo anche che f ha *limite infinito in* x_0 .
Se nella (5.1.28) $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$, diciamo anche che f ha limite l *all'infinito*. ◊

La definizione di limite (5.1.29) ammette importanti formulazioni equivalenti, date dai seguenti teoremi.

Teorema 5.1.1 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione reale di dominio* $X \subseteq \mathbb{R}$
- $l \in \mathbb{R}$
- $x_0 \in \mathbb{R}$ *un punto di accumulazione per* X
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Le dichiarazioni seguenti sono equivalenti:

$$(5.1.30) \qquad \forall N_l \quad \exists N_{x_0} \ : \ \left(x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}\right) \Rightarrow (f(x) \in N_l)$$

$$(5.1.31) \qquad \forall \varepsilon \in \,]0, +\infty[\quad \exists \delta \in \,]0, +\infty[\ : \ \forall x \in X$$

$$(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)$$

(5.1.32) $\quad \forall \varepsilon \in \,]0,+\infty[\quad \exists \delta \in \,]0,+\infty[\ :\ \forall x \in X-\{x_0\}$

$$(x_0-\delta<x<x_0+\delta) \Rightarrow (l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon)\ .$$

Dimostrazione. (5.1.30) ⇒ (5.1.31). Supponiamo vera la (5.1.30). Per ottenere la (5.1.31), consideriamo un qualsiasi $\varepsilon \in \,]0,+\infty[$. Quindi, $N_l = \,]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ è un intorno di l . Per la (5.1.30), esiste un intorno N_{x_0} di x_0 tale che

(5.1.33) $\quad \big(x \in N_{x_0} \cap X-\{x_0\}\big) \Rightarrow (f(x) \in \,]l-\varepsilon, l+\varepsilon[).$

Poiché N_{x_0} è un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, esistono $h\,,k \in \mathbb{R}$ tali che $N_{x_0} = \,]h,k[$ e $h<x_0<k$. Quindi $\delta = min\{k-x_0, x_0-h\} \in \,]0,+\infty[$. Consideriamo un qualsiasi $x \in X$ tale che $0<|x-x_0|<\delta$. Poiché $0<|x-x_0|$, risulta $x \neq x_0$. Poiché $|x-x_0|<\delta$, abbiamo $-\delta<x-x_0<\delta$, quindi $h \leq x_0-\delta<x<x_0+\delta \leq k$, quindi $x \in \,]h,k[\, = N_{x_0}$. Pertanto, $x \in N_{x_0} \cap X-\{x_0\}$. Dalla (5.1.30) otteniamo $f(x) \in N_l = \,]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. Quindi $-\varepsilon<f(x)-l<\varepsilon$. Quindi $|f(x)-l|<\varepsilon$.

(5.1.31) ⇒ (5.1.32). Supponiamo vera la (5.1.31). Per ottenere la (5.1.32), consideriamo un qualsiasi $\varepsilon \in \,]0,+\infty[$. Per la (5.1.31) esiste $\delta \in \,]0,+\infty[$ tale che

(5.1.34) $\quad \forall x \in X \qquad (0<|x-x_0|<\delta) \Rightarrow (|f(x)-l|<\varepsilon)\ .$

Consideriamo un qualsiasi $x \in X - \{x_0\}$ tale che $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. Quindi $-\delta < x - x_0 < \delta$, quindi $0 < |x - x_0| < \delta$. Dalla (5.1.31) segue $|f(x) - l| < \varepsilon$, quindi $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

(5.1.32) $\Rightarrow$ (5.1.30). Supponiamo vera la (5.1.32). Per ottenere la (5.1.30), consideriamo un qualsiasi intorno N_l di $l \in \mathbb{R}$. Allora, esistono $h, k \in \mathbb{R}$ tali che $N_l =]h, k[$ e $h < l < k$. Quindi, $\varepsilon = min\{k - l, l - h\} \in]0, +\infty[$. Per la (5.1.32), esiste $\delta \in]0, +\infty[$ tale che $\forall x \in X - \{x_0\}$

(5.1.35) $$(x_0 - \delta < x < x_0 + \delta) \Rightarrow (l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon).$$

Denotiamo con N_{x_0} l'intorno $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ di x_0 e consideriamo un qualsiasi $x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}$. Ovviamente $x \in X - \{x_0\}$. Inoltre, $x \in N_{x_0} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Quindi $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. Per la (5.1.35), risulta $h \leq l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \leq k$. Quindi $f(x) \in]h, k[= N_l$. ◊

Osservazione 5.1.16 Per la (1.2.8), se $l, \varepsilon, y \in \mathbb{R}$ risulta

$$(l - \varepsilon < y < l + \varepsilon) \Leftrightarrow (|y - l| < \varepsilon).$$

Infatti, se $l - \varepsilon < y < l + \varepsilon$, risulta $-\varepsilon < y - l < \varepsilon$, quindi, per la (1.2.8), $|y - l| < \varepsilon$. Se $|y - l| < \varepsilon$, risulta, per la (1.2.8), $-\varepsilon < y - l < \varepsilon$; quindi $l - \varepsilon < y < l + \varepsilon$. ◊

Teorema 5.1.2 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione reale di dominio* $X \subseteq \mathbb{R}$
- $l = +\infty$
- $x_0 \in \mathbb{R}$ *un punto di accumulazione per* X
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Le dichiarazioni seguenti sono equivalenti:

(5.1.36) $\forall N_l \quad \exists N_{x_0} \ : \ \left(x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}\right) \Rightarrow (f(x) \in N_l)$

(5.1.37) $\forall k \in]0, +\infty[\quad \exists \delta \in]0, +\infty[\ : \ \forall x \in X$

$$(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (f(x) > k) \ .$$

Dimostrazione. (5.1.36) $\Rightarrow$ (5.1.37). Supponiamo vera la (5.1.36). Per ottenere la (5.1.37), consideriamo un qualsiasi $k \in]0, +\infty[$. Allora, $N_l =]k, +\infty[$ è un intorno del simbolo $l = +\infty$. Per la (5.1.36), esiste un intorno N_{x_0} di x_0 tale che

(5.1.38) $\left(x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}\right) \Rightarrow (f(x) > k)$.

Poiché N_{x_0} è un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $N_{x_0} =]a, b[$ e $a < x_0 < b$. Quindi, $\delta = min\{b - x_0, x_0 - a\} \in]0, +\infty[$. Sia x un qualsiasi elemento di X tale che $0 < |x - x_0| < \delta$. Risultando $0 < |x - x_0|$, abbiamo $x \neq x_0$. Risultando $|x - x_0| < \delta$, abbiamo $a \leq$

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \leq b$, quindi $x \in]a, b[= N_{x_0}$. Pertanto, $x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}$. Per la (5.1.38), risulta $f(x) > k$.

$(5.1.37) \Rightarrow (5.1.36)$. Supponiamo vera la (5.1.37). Per conseguire la (5.1.36), consideriamo un qualsiasi intorno N_l del simbolo $l = +\infty$. Allora, esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $N_l =]k, +\infty[$. Per la (5.1.37), in corrispondenza di $|k| + 1 \in]0, +\infty[$, esiste $\delta \in]0, +\infty[$ tale che $\forall x \in X$

(5.1.39) $$(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (f(x) > |k| + 1) .$$

Consideriamo l'intorno $N_{x_0} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ di x_0 . Consideriamo un qualsiasi $x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}$. Quindi $x \in X$, $x \neq x_0$, $0 < |x - x_0|$. Inoltre, $x \in N_{x_0} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Quindi $|x - x_0| < \delta$. Per la $(5.1.39)$ risulta $f(x) > |k| + 1 > k$. Di conseguenza, $f(x) \in N_l$. ◊

Teorema 5.1.3 *Siano*

- $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione reale di dominio* $X \subseteq \mathbb{R}$
- $l = -\infty$
- $x_0 \in \mathbb{R}$ *un punto di accumulazione per* X
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Le dichiarazioni seguenti sono equivalenti:

(5.1.40) $$\forall N_l \quad \exists N_{x_0} \ : \ \left(x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}\right) \Rightarrow (f(x) \in N_l)$$

$$(5.1.41) \qquad \forall k \in \,]0,+\infty[\quad \exists \delta \in \,]0,+\infty[\; : \quad \forall x \in X$$
$$(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (f(x) < -k)\,.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è perfettamente analoga a quella del teorema 5.1.2. ◊

Teorema 5.1.4 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione reale di dominio* $X \subseteq \mathbb{R}$
- $l \in \mathbb{R}$
- $x_0 = +\infty$ *un punto di accumulazione per* X
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Le dichiarazioni seguenti sono equivalenti:

$$(5.1.42) \qquad \forall N_l \quad \exists N_{x_0} \; : \; \left(x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}\right) \Rightarrow (f(x) \in N_l)$$

$$(5.1.43) \qquad \forall \varepsilon \in \,]0,+\infty[\quad \exists \delta \in \,]0,+\infty[\; : \quad \forall x \in X$$
$$(x > \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)\,.$$

Dimostrazione. (5.1.42) ⇒ (5.1.43). Supponiamo vera la (5.1.42). Per ottenere la (5.1.43), consideriamo un qualsiasi $\varepsilon \in \,]0,+\infty[$. Allora, $N_l = \,]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ è un intorno del numero reale l . Per la (5.1.42), esiste un intorno N_{x_0} di x_0 tale che

(5.1.44) $$\left(x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}\right) \Rightarrow (f(x) \in \,]l-\varepsilon, l+\varepsilon[) \,.$$

Poiché N_{x_0} è un intorno del simbolo $x_0 = +\infty$, esiste $h \in \mathbb{R}$ tale che $N_{x_0} = \,]h, +\infty[$. Conseguentemente, $\delta = |h| + 1 \in \,]0, +\infty[$. Sia $x \in X$ tale che $x > \delta$. Quindi $x > h$, quindi $x \in N_{x_0}$. Poiché $x \notin \{+\infty\}$, risulta $x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}$. Per la (5.1.44), abbiamo $f(x) \in \,]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. Quindi $-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$. Quindi $|f(x) - l| < \varepsilon$.
(5.1.43) $\Rightarrow$ (5.1.42). Supponiamo vera la (5.1.43). Per stabilire la (5.1.42), consideriamo un qualsiasi intorno N_l di $l \in \mathbb{R}$. Allora, esistono $h\,, k \in \mathbb{R}$ tali che $N_l = \,]h, k[$ e $h < l < k$. Pertanto, $\varepsilon = min\{k-l, l-h\} \in \,]0, +\infty[$. Per la (5.1.43), esiste $\delta \in \,]0, +\infty[$ tale che $\forall x \in X$

(5.1.45) $$(x > \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon) \,.$$

Denotiamo con N_{x_0} l'intorno $]\delta, +\infty[$ di x_0 e consideriamo un qualsiasi $x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}$. Ovviamente $x \in X - \{x_0\}$. Inoltre $x \in N_{x_0} = \,]\delta, +\infty[$, quindi $x > \delta$. Per la (5.1.45), risulta $h \leq l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \leq k$. Quindi $f(x) \in \,]h, k[\, = N_l$. ◊

Teorema 5.1.5 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione reale di dominio* $X \subseteq \mathbb{R}$

- $l \in \mathbb{R}$
- $x_0 = -\infty$ *un punto di accumulazione per* X
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Le dichiarazioni seguenti sono equivalenti:

(5.1.46) $\forall N_l \quad \exists N_{x_0} \ : \ \left(x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}\right) \Rightarrow (f(x) \in N_l)$

(5.1.47) $\forall \varepsilon \in \,]0, +\infty[\quad \exists \delta \in \,]0, +\infty[\ : \ \forall x \in X$

$$(x < -\delta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon) .$$

Dimostrazione. La dimostrazione è perfettamente analoga a quella del teorema 5.1.4. ◊

Teorema 5.1.6 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione reale di dominio* $X \subseteq \mathbb{R}$
- $l = +\infty$.
- $x_0 = +\infty$ *un punto di accumulazione per* X
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Le dichiarazioni seguenti sono equivalenti:

(5.1.48) $\forall N_l \quad \exists N_{x_0} \ : \ \left(x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}\right) \Rightarrow (f(x) \in N_l)$

(5.1.49) $\qquad \forall k \in]0,+\infty[\quad \exists \delta \in]0,+\infty[\ : \ \forall x \in X$

$$(x > \delta) \Rightarrow (f(x) > k) .$$

Dimostrazione. (5.1.48) ⇒ (5.1.49). Supponiamo vera la (5.1.48). Per conseguire la (5.1.49), consideriamo un qualsiasi $k \in]0,+\infty[$. Allora, $N_l =]k,+\infty[$ è un intorno del simbolo l . Per la (5.1.48), esiste un intorno N_{x_0} del simbolo x_0 tale che

(5.1.50) $$\left(x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}\right) \Rightarrow (f(x) > k) .$$

Poiché N_{x_0} è un intorno del simbolo $x_0 = +\infty$, esiste $h \in \mathbb{R}$ tale che $N_{x_0} =]h,+\infty[$. Ovviamente, $\delta = |h| + 1 \in]0,+\infty[$. Sia ora $x \in X$ tale che $x > \delta$. Quindi $x > h$, quindi $x \in N_{x_0}$. Poiché $x \notin \{+\infty\}$, risulta $x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}$. Per la (5.1.50), otteniamo $f(x) > k$.

(5.1.49) ⇒ (5.1.48). Supponiamo vera la (5.1.49). Per ottenere la (5.1.48), consideriamo un qualsiasi intorno N_l di $l = +\infty$. Allora, esiste $h \in \mathbb{R}$ tale che $N_l =]h = +\infty[$. Ovviamente, $k = |h| + 1 \geq 1 > 0$. Quindi $k \in]0,+\infty[$. Per la (5.1.49), esiste $\delta \in]0,+\infty[$ tale che $\forall x \in X$

(5.1.51) $$(x > \delta) \Rightarrow (f(x) > k) .$$

Denotiamo con N_{x_0} l'intorno $]\delta,+\infty[$ del simbolo x_0 e consideriamo un qualsiasi $x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}$. Ovviamente $x \in X$. Inoltre $x \in N_{x_0} =]\delta, +\infty[$, quindi $x > \delta$. Per la (5.1.51), $f(x) > k = |h| + 1 > |h| \geq h$. Quindi $f(x) \in]h, +\infty[= N_l$. ◊

Teorema 5.1.7 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione reale di dominio* $X \subseteq \mathbb{R}$
- $l = +\infty$.
- $x_0 = -\infty$ *un punto di accumulazione per* X
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Le dichiarazioni seguenti sono equivalenti:

(5.1.52) $\forall N_l \quad \exists N_{x_0} \ : \ \left(x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}\right) \Rightarrow (f(x) \in N_l)$

(5.1.53) $\forall k \in]0, +\infty[\quad \exists \delta \in]0, +\infty[\ : \ \forall x \in X$

$$(x < -\delta) \Rightarrow (f(x) > k) .$$

Dimostrazione. La dimostrazione è perfettamente analoga a quella del teorema 5.1.6. ◊

Teorema 5.1.8 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione reale di dominio* $X \subseteq \mathbb{R}$
- $l = -\infty$.

- $x_0 = +\infty$ *un punto di accumulazione per* X
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Le dichiarazioni seguenti sono equivalenti:

(5.1.54) $\quad \forall N_l \quad \exists N_{x_0} \ : \ \left(x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}\right) \Rightarrow (f(x) \in N_l)$

(5.1.55) $\quad \forall k \in]0,+\infty[\quad \exists \delta \in]0,+\infty[\ : \ \forall x \in X$

$$(x > \delta) \Rightarrow (f(x) < -k) .$$

Dimostrazione. (5.1.54) $\Rightarrow$ (5.1.55). Supponiamo vera la (5.1.54). Per ottenere la (5.1.55), consideriamo un qualsiasi $k \in]0,+\infty[$. Allora, $N_l =]-\infty,-k[$ è un intorno del simbolo l . Per la (5.1.54), esiste un intorno N_{x_0} del simbolo x_0 tale che

(5.1.56) $\quad \left(x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}\right) \Rightarrow (f(x) < -k)$.

Poiché N_{x_0} è un intorno del simbolo $x_0 = +\infty$, esiste $h \in \mathbb{R}$ tale che $N_{x_0} =]h,+\infty[$. Consideriamo $\delta = |h| + 1 \in]0,+\infty[$. Scegliamo $x \in X$ tale che $x > \delta$. Quindi $x > h$, quindi $x \in N_{x_0}$. Poiché $x \notin \{+\infty\}$, risulta $x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}$. Per la (5.1.56), abbiamo $f(x) < -k$.

(5.1.55) $\Rightarrow$ (5.1.54). Supponiamo vera la (5.1.55). Per ottenere la (5.1.54), consideriamo un qualsiasi intorno N_l di $l = -\infty$. Allora, esiste $h \in \mathbb{R}$ tale che $N_l =]-\infty,h[$. Risulta $k = |h| + 1 \geq 1 > 0$. Quindi $k \in$

$]0,+\infty[$. Per la (5.1.55), esiste $\delta \in]0,+\infty[$ tale che $\forall x \in X$

(5.1.57) $$(x > \delta) \Rightarrow (f(x) < -k) .$$

Denotiamo con N_{x_0} l'intorno $]\delta,+\infty[$ del simbolo x_0 e consideriamo un qualsiasi $x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}$. Ovviamente $x \in X$. Inoltre $x \in N_{x_0} =]\delta,+\infty[$, quindi $x > \delta$. Per la (5.1.57), $f(x) < -k$. Quindi $f(x) \in N_l =]-\infty,h[$. Infatti

- se $h > 0$ risulta $k = h + 1 > h$ e quindi $f(x) < -k < -h < 0 < h$
- se $h = 0$ risulta $k = 1 > 0$ e quindi $f(x) < -k < 0 = h$
- se $h < 0$ risulta $k = |h| + 1 = -h + 1$ e quindi $f(x) < -k = h - 1 < h$. ◊

Teorema 5.1.9 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione reale di dominio* $X \subseteq \mathbb{R}$
- $l = -\infty$.
- $x_0 = -\infty$ *un punto di accumulazione per* X
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Le dichiarazioni seguenti sono equivalenti:

(5.1.58) $$\forall N_l \quad \exists N_{x_0} \ : \ \left(x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}\right) \Rightarrow (f(x) \in N_l)$$

(5.1.59) $\forall k \in]0,+\infty[\quad \exists \delta \in]0,+\infty[\ : \quad \forall x \in X$

$$(x < -\delta) \Rightarrow (f(x) < -k) .$$

Dimostrazione. La dimostrazione è perfettamente analoga a quella del teorema 5.1.8. ◊

Il seguente teorema dimostra l'unicità del limite di una funzione reale di una variabile reale.

Teorema 5.1.10 [*unicità del limite*] *Siano*

- f *una funzione reale di dominio* $X \subseteq \mathbb{R}$
- $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *un punto di accumulazione per* X
- $l, m \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = m$.

In tali ipotesi, risulta

$$l = m .$$

Dimostrazione. Dimostriamo la tesi nel caso $l, m \in \mathbb{R}$. Negli altri casi è possibile ragionare in modo analogo.

Supponiamo quindi

(5.1.60) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

(5.1.61) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = m \in \mathbb{R}\,.$$

Per assurdo, supponiamo $l > m$. Sia $\varepsilon = \frac{l-m}{4} \in]0, +\infty[$. Per le $(5.1.60), (5.1.61)$ e per i teoremi 5.1.1 , 5.1.4 , 5.1.5 , esistono due intorni ($\overline{N}_{x_0}$ e $\overline{\overline{N}}_{x_0}$) di x_0 tali che

(5.1.62) $$\left(x \in \overline{N}_{x_0} \cap X - \{x_0\}\right) \Rightarrow (l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon)$$

(5.1.63) $$\left(x \in \overline{\overline{N}}_{x_0} \cap X - \{x_0\}\right) \Rightarrow (m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon)\,.$$

Dal teorema 3.1.7 segue che $N_{x_0} = \overline{N}_{x_0} \cap \overline{\overline{N}}_{x_0}$ è un intorno di x_0 . Poiché x_0 è punto di accumulazione di X, esiste $\tilde{x} \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}$. Per le $(5.1.62), (5.1.63)$, risulta $l - \varepsilon < f(\tilde{x}) < m + \varepsilon$, quindi $\varepsilon > \frac{l-m}{2}$. Ciò è assurdo, dal momento che $\varepsilon = \frac{l-m}{4}$.

Un analogo ragionamento dimostra che la diseguaglianza $l > m$ è falsa. Pertanto $l = m$. ◊

Il seguente teorema dimostra la proprietà chiamata permanenza del segno.

Teorema 5.1.11 [*permanenza del segno*] *Siano*

- f *una qualsiasi funzione reale di dominio* $X \subseteq \mathbb{R}$
- $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *un qualsiasi punto di accumulazione per* X
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in]0, +\infty]$.

Allora esiste un intorno N_{x_0} *di* x_0 *tale che*

(5.1.64) $\quad \forall x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}$ *risulta* $f(x) > 0$.

Dimostrazione. Se $l = +\infty$ la tesi è ovvia. Se $l \in]0, +\infty[$, scegliamo $\varepsilon = \frac{l}{2} \in]0, +\infty[$. Per ipotesi, esiste un intorno N_{x_0} di x_0 tale che $\forall x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}$ risulta $0 < \frac{l}{2} = l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. ◊

Studiamo ora il limite sinistro ed il limite destro di una funzione reale di una variabile reale.

Definizione 5.1.27 Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Chiamiamo *intorno sinistro di* x_0 , e denotiamo con il simbolo $N_{x_0^-}$, ogni intervallo $]a, x_0]$, dove $a \in]-\infty, x_0[$. ◊

Definizione 5.1.28 Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Chiamiamo *intorno destro di* x_0 , e denotiamo con il simbolo $N_{x_0^+}$, ogni intervallo $[x_0, b[$, dove $b \in]x_0, +\infty[$. ◊

Definizione 5.1.29 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Diciamo che x_0 è un *punto di accumulazione a sinistra per* X se, per *ogni* intorno sinistro $N_{x_0^-}$ di x_0, risulta

$$N_{x_0^-} \cap X - \{x_0\} \neq \emptyset . \tag{5.1.65}$$

Definizione 5.1.30 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Diciamo che x_0 è un *punto di accumulazione a destra per* X se, per *ogni* intorno destro $N_{x_0^+}$ di x_0, risulta

$$N_{x_0^+} \cap X - \{x_0\} \neq \emptyset . \tag{5.1.66}$$

Osservazione 5.1.17 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Chiaramente, se x_0 è un punto di accumulazione a sinistra per X, allora x_0 è un punto di accumulazione per X. ◊

Osservazione 5.1.18 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Chiaramente, se x_0 è un punto di accumulazione a destra per X, allora x_0 è un punto di accumulazione per X. ◊

Definizione 5.1.31 *Siano*

- f *una qualsiasi funzione reale di dominio* $X \subseteq \mathbb{R}$