CAPITOLO 6

DERIVAZIONE ◊

6.1 Derivazione di funzioni reali di una variabile reale

6.1.1 Derivata

Definizione 6.1.1 Siano

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X.

Chiamiamo *rapporto incrementale di* f *in* x_0 la funzione

$$(6.1.1) \qquad x \in X - \{x_0\} \quad \to \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad .$$

Evidentemente x_0 è anche un punto di accumulazione per $X - \{x_0\}$. Se esiste il limite in x_0 del rapporto incrementale di f in x_0 e se tale

◊ A. Maceri, *Derivazione*, e-ISBN 978-88-85929-81-4, © Accademica 2021

limite è un numero reale, chiamiamo tale limite *derivata della funzione* f *in* x_0 , e la denotiamo col simbolo $f'(x_0)$. Pertanto,

(6.1.2)
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ .$$

Denotiamo con $X' \subseteq X$ l'insieme dei punti x_0 in cui esiste il limite (6.1.2). Chiamiamo *derivata* (o *derivata prima*) di f , e denotiamo col simbolo f' (oppure col simbolo $\frac{d}{dx} f$ oppure col simbolo $\frac{df}{dx}$), la funzione reale di una variabile reale

$$f' \ : \ x_0 \in \ X' \subseteq X \to f'(x_0) \in \mathbb{R} \ . \ \diamond$$

Osservazione 6.1.1 Se f' è definita in un punto x_0 , diciamo che f è *derivabile in* x_0 . Se f' è definita in ogni punto di un insieme $X' \subseteq X$, diciamo che f è *derivabile in* X'. $\diamond$

Teorema 6.1.1 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $x_0 \in X$ *un punto di accumulazione per* X.

In tali ipotesi le dichiarazioni seguenti sono equivalenti:

(6.1.3)
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(6.1.4) $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad .$$

Dimostrazione. Ovvio. ◊

Osservazione 6.1.2 La derivata (6.1.2) ha una *interpretazione geometrica* che è molto importante per le applicazioni.
Sia f una funzione che trasforma $X \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Sia O, x, y, in un qualsiasi piano, un *riferimento Cartesiano ortogonale*. Consideriamo, per ogni $x \in X$, il punto P del piano di ascissa x e ordinata $y = f(x)$. Al variare di x in X, il punto $P = (x, f(x))$ descrive nel piano un insieme di punti chiamato *diagramma Cartesiano della funzione* f.
Siano (fig. 6.1.1)

- x_0 un punto di X in cui f è derivabile
- x un qualsiasi punto di X distinto da x_0
- $s(x)$ la retta passante per $(x_0, f(x_0))$ e *secante*, nel punto $(x, f(x))$, il *diagramma Cartesiano* della funzione f
- t_0 la retta *tangente* al *diagramma Cartesiano* nel punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Con ogni evidenza, il *coefficiente angolare* $\operatorname{tg} \alpha(x)$ della retta secante è proprio il rapporto incrementale di f in x_0:

$$\operatorname{tg} \alpha(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad .$$

Supponiamo f *derivabile in* x_0. E' palese, in fig. 6.1.1, che quando x

tende a x_0 , la secante $s(x)$ tende alla tangente t_0 . Pertanto risulta

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \,.$$

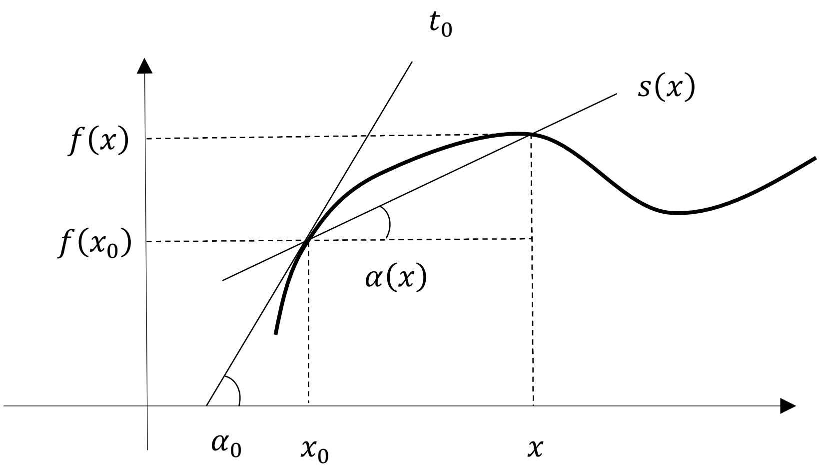

Fig. 6.1.1

Da quanto sopra emerge che, *se diciamo che* f *è derivabile in* x_0 *e che il valore della derivata in* x_0 *è* $f'(x_0)$ *, geometricamente stiamo dicendo che*

- *il diagramma Cartesiano della funzione* f *nel punto* $(x_0, f(x_0))$ *ha una tangente* t_0 *il cui coefficiente angolare è* $tg\ \alpha_0 = f'(x_0)$
- quando x tende a x_0 , allora la secante $s(x)$, passante per $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$, tende alla tangente t_0 . ◊

Osservazione 6.1.3 E' ovvio che una qualsiasi funzione *costante* è derivabile in ogni punto del suo insieme di definizione e che la sua derivata è identicamente pari a zero. ◊

Teorema 6.1.2 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *derivabile in* $x_0 \in X$.

In tali ipotesi, f *è continua in* x_0 .

Dimostrazione. Risulta

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \cdot (x - x_0) .$$

Quindi, per il teorema 5.1.30

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 ,$$

quindi, per il teorema 5.1.29

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \; . \; ◊$$

Osservazione 6.1.4 Si noti che l'inverso del teorema 6.1.2 è falso. Infatti, la funzione *valore assoluto*

$$x \in \mathbb{R} \quad \to \quad |x| \in [0, +\infty[$$

è continua in 0, ma il suo rapporto incrementale nel punto 0 non ammette limite per $x \to 0$. Infatti

$$\frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in]0, +\infty[\\ -1 & \text{se } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

ed in conseguenza

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1 \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1 \ . \ \diamond$$

Quanto alla derivata della funzione somma, si ha quanto segue.

Teorema 6.1.3 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $g: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *e* g *derivabili in* $x_0 \in X$.

In tali ipotesi, $f + g$ *è derivabile in* x_0 *e risulta*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \ . \tag{6.1.5}$$

Dimostrazione. Dal teorema 5.1.29 segue che

$$(f + g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$+ \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0) \ . \ \diamond$$

Circa la derivata della funzione prodotto, si ha quanto segue.

Teorema 6.1.4 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $g: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *e* g *derivabili in* $x_0 \in X$.

In tali ipotesi, $f \cdot g$ *è derivabile in* x_0 *e risulta*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \ . \tag{6.1.6}$$

Dimostrazione. Dai teoremi 5.1.29, 5.1.30 e dall'ipotesi di continuità, segue che

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) g(x) + f(x_0) \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \right]$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \ . \ \diamond$$

Ossservazione 6.1.5 Siano

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $g: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *e* g *derivabili in* $x_0 \in X$
- $g(x_0) \neq 0$.

In tali ipotesi, è ovvio che esiste un intorno di x_0 nel quale $\frac{f}{g}$ è definita e che x_0 è un punto di accumulazione per l'insieme di definizione di $\frac{f}{g}$.

◊

Circa la derivata della funzione rapporto, sussiste il seguente teorema.

Teorema 6.1.5 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $g: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *e* g *derivabili in* $x_0 \in X$
- $g(x_0) \neq 0$.

In tali ipotesi, $\frac{f}{g}$ *è derivabile in* x_0 *e risulta*

$$(6.1.7) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,.$$

Dimostrazione. Dai teoremi 6.1.2, 5.1.29, 5.1.30, 5.1.33 e dalle ipotesi segue che

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left\{\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left[\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)g(x_0) - f(x)\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{g^2(x_0)}\big(f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)\big) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,.$$

◊

Osservazione 6.1.6 Consideriamo la *funzione identica*

$$f \;:\; x \in \mathbb{R} \to f(x) = x\,.$$

E' immediato verificare che $\forall x \in \mathbb{R}$ risulta $f'(x) = 1$ e che, applicando ripetutamente la (6.1.6), la funzione

$$f \ : \ x \in \mathbb{R} \to f(x) = x^n \, ,$$

dove $n \in \mathbb{N}$, è derivabile in $\mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$ risulta

$$f'(x) = n\, x^{n-1} . \ \diamond$$

Circa la derivata della funzione composta, si ha quanto segue.

Teorema 6.1.6 *Supponiamo che*

- $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $g : f(X) \to \mathbb{R}$
- $x_0 \in X$
- x_0 *è un punto di accumulazione per* X
- $f(x_0)$ *è un punto di accumulazione per* $f(X)$
- f *è derivabile in* x_0
- g *è derivabile in* $f(x_0)$.

In tali ipotesi, la funzione composta $g \circ f$ *è derivabile in* x_0 *e risulta*

(6.1.8) $$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)\, f'(x_0) \, .$$

Dimostrazione. Per conseguire la (6.1.8), dobbiamo dimostrare che

(6.1.9) $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists H_{x_0} \ : \qquad \forall x \in X \cap H_{x_0} - \{x_0\}$$

$$\left|\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}-g'(f(x_0))f'(x_0)\right|<\varepsilon\,.$$

Per ipotesi, g è derivabile in $f(x_0)$, quindi

(6.1.10) $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta_1>0: \quad \forall y\in f(X)$

$$(0<|y-f(x_0)|<\delta_1)\Rightarrow\left(\left|\frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}-g'(f(x_0))\right|<\varepsilon\right).$$

Per ipotesi, f è derivabile in x_0 , quindi

(6.1.11) $\forall\rho>0 \quad \exists W_{x_0}: \quad \forall x\in X\cap W_{x_0}-\{x_0\}$

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\rho\,.$$

Per il teorema 6.1.2, f è continua in x_0 , quindi

(6.1.12) $\forall\beta>0 \quad \exists J_{x_0}: \quad \forall x\in X\cap J_{x_0}-\{x_0\}$

$$|f(x)-f(x_0)|<\beta\,.$$

I casi possibili sono $f'(x_0)\neq 0$ e $f'(x_0)=0$.
Supponiamo $f'(x_0)\neq 0$. Per il teorema 5.1.11

$$\exists I_{x_0} \ : \quad \forall x \in X \cap I_{x_0} - \{x_0\} \qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq 0 \,,$$

quindi

$$\exists I_{x_0} \ : \quad \forall x \in X \cap I_{x_0} - \{x_0\} \qquad f(x)-f(x_0) \neq 0 \,,$$

quindi

$$(6.1.13) \qquad \forall x \in X \cap I_{x_0} - \{x_0\}$$

$$\left|\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{x-x_0} - g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{f(x)-f(x_0)}\right)\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) - g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)\right|$$

$$= \left|\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{f(x)-f(x_0)}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{f(x)-f(x_0)}f'(x_0)\right.$$

$$\left. + \frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{f(x)-f(x_0)}f'(x_0) - g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)\right|$$

$$\leq \left|\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{f(x)-f(x_0)}\right| \cdot \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right|$$

$$+ |f'(x_0)| \cdot \left|\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{f(x)-f(x_0)} - g'\big(f(x_0)\big)\right| .$$

Inoltre, in corrispondenza del numero reale positivo 1 , per la (6.1.10) si ha che

(6.1.14) $\quad \exists \delta_2 > 0 \ : \quad \forall y \in f(X) \quad$ se $\quad 0 < |y - f(x_0)| < \delta_2 \quad$ risulta

$$\left|\frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)}\right| \leq \left|\frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} - g'(f(x_0))\right|$$

$$+\left|g'(f(x_0))\right| < 1 + \left|g'(f(x_0))\right| .$$

Per ottenere la (6.1.9), si consideri ora un qualsiasi $\varepsilon \in]0, +\infty[$. Osserviamo che, in corrispondenza del numero reale positivo

$$\frac{\varepsilon}{2\left(1 + \left|g'(f(x_0))\right|\right)} \ ,$$

per la (6.1.11) si ha

(6.1.15) $\qquad \exists W_{x_0} \ : \quad \forall x \in X \cap W_{x_0} - \{x_0\} \qquad \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right|$

$$< \frac{\varepsilon}{2\left(1 + \left|g'(f(x_0))\right|\right)} .$$

Inoltre, in corrispondenza del numero reale positivo

$$\frac{\varepsilon}{2|f'(x_0)|} \ ,$$

per la (6.1.10) si ha

$$(6.1.16) \qquad \exists \delta_1 > 0 \ : \ \forall y \in f(X) \qquad (0 < |y - f(x_0)| < \delta_1)$$
$$\Rightarrow \left(\left| \frac{g(y) - g\big(f(x_0)\big)}{y - f(x_0)} - g'\big(f(x_0)\big) \right| < \frac{\varepsilon}{2|f'(x_0)|} \right).$$

Inoltre, in corrispondenza del numero reale positivo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, per la (6.1.12) si ha

$$(6.1.17) \qquad \exists J_{x_0} \ : \ \forall x \in X \cap J_{x_0} - \{x_0\} \qquad |f(x) - f(x_0)| < \delta\,.$$

Con ogni evidenza, $H_{x_0} = I_{x_0} \cap W_{x_0} \cap J_{x_0}$ è un intorno di x_0 e per ogni $x \in X \cap H_{x_0} - \{x_0\}$, tenendo conto delle (6.1.13), (6.1.17), (6.1.14), (6.1.15), (6.1.16), si ha

$$\left| \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{x - x_0} - g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Pertanto, se $f'(x_0) \neq 0$, la (6.1.8) è vera.
Supponiamo ora $f'(x_0) = 0.$ Ovviamente la (6.1.9) diventa

$$(6.1.18) \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists H_{x_0} \ : \qquad \forall x \in X \cap H_{x_0} - \{x_0\}$$

$$\left|\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{x-x_0}\right|<\varepsilon\,.$$

Per conseguire la (6.1.18), consideriamo un qualsiasi $\varepsilon\in\,]0,+\infty[$.
In corrispondenza del numero reale positivo 1 , per la (6.1.10) si ha

(6.1.19) $\exists\delta>0\ :\ \forall y\in f(X)$ se $0<|y-f(x_0)|<\delta$ risulta

$$\left|\frac{g(y)-g\big(f(x_0)\big)}{y-f(x_0)}\right|<1+\left|g'\big(f(x_0)\big)\right|.$$

Inoltre, in corrispondenza del numero reale positivo δ , per la (6.1.12) si ha

(6.1.20) $\exists J_{x_0}\ :\quad \forall x\in X\cap J_{x_0}-\{x_0\}\qquad |f(x)-f(x_0)|<\delta\,.$

Osserviamo che, in corrispondenza del numero reale positivo

$$\frac{\varepsilon}{1+\left|g'\big(f(x_0)\big)\right|}\ ,$$

per la (6.1.11) si ha

(6.1.21) $\exists W_{x_0}\ :\quad \forall x\in X\cap W_{x_0}-\{x_0\}$

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| < \frac{\varepsilon}{1+|g'(f(x_0))|}\,.$$

Evidentemente, $H_{x_0} = W_{x_0} \cap J_{x_0}$ è un intorno di x_0 . Sia $x \in X \cap H_{x_0} - \{x_0\}$. Se $f(x) = f(x_0)$, ovviamente la (6.1.18) è vera. Se $f(x) \neq f(x_0)$, tenendo conto delle (6.1.20), (6.1.19), (6.1.21), si ha

$$\left|\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}\right| = \left|\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\right| \cdot \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|$$

$$< \left(1+|g'(f(x_0))|\right)\frac{\varepsilon}{1+|g'(f(x_0))|} = \varepsilon$$

con il che la (6.1.18) è vera. ◊

Circa la derivata della funzione inversa, si ha quanto segue.

Teorema 6.1.7 *Supponiamo che*

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
- $f: [a, b] \to \mathbb{R}$
- f *è continua e strettamente monotona*
- $x_0 \in [a, b]$
- f *è derivabile in* x_0
- $f'(x_0) \neq 0$.

In tali ipotesi, la funzione inversa f^{-1} *è derivabile in* $f(x_0)$ *e risulta*

(6.1.22) $$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Dimostrazione. Per conseguire la (6.1.22), dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{y\to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

i.e., che

(6.1.23) $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad : \quad \forall y \in f(X)$

$$(0 < |y - f(x_0)| < \delta) \Rightarrow \left(\left|\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)}\right| < \varepsilon\right).$$

Osserviamo preliminarmente che, per ipotesi, $f(x_0)$ è un punto di accumulazione per $f(X)$. Infatti, sia $I_{f(x_0)}$ un qualsiasi intorno di $f(x_0)$. Poiché f è continua in x_0 , $\exists\ J_{x_0}$ tale che $\forall x \in J_{x_0} \cap X - \{x_0\}$ risulta $f(x_0) \in I_{f(x_0)}$. Siccome x_0 è un punto di accumulazione per X , $\exists\ x_1 \in J_{x_0} \cap X - \{x_0\}$ e ciò implica $f(x_1) \in I_{f(x_0)}$. Poiché f è strettamente monotona, risulta $f(x_1) \neq f(x_0)$ e quindi $I_{f(x_0)} \cap f(X) - \{f(x_0)\} \neq \emptyset$.

Osserviamo ora che la funzione rapporto incrementale di f in x_0 converge verso un limite diverso da zero. In conseguenza

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

i.e.

$$(6.1.24) \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_1 > 0 \quad : \quad \forall x \in X$$

$$(0 < |x - x_0| < \delta_1) \Rightarrow \left(\left| \frac{1}{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon \right).$$

Inoltre f^{-1} è continua, poiché è la funzione inversa di una funzione continua. Quindi

$$\lim_{y \to f(x_0)} f^{-1}(y) = f^{-1}\big(f(x_0)\big) = x_0$$

i.e.

$$(6.1.25) \qquad \forall \beta > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad \forall y \in f(X)$$

$$(|y - f(x_0)| < \delta) \Rightarrow (|f^{-1}(y) - x_0| < \beta)\,.$$

Ora possiamo costruire la (6.1.23). Sia ε un qualsiasi numero reale positivo. In corrispondenza di ε , la (6.1.24) ci fornisce un numero reale positivo δ_1 tale che $\forall x \in X$

$$(6.1.26) \qquad (0 < |x - x_0| < \delta_1) \Rightarrow \left(\left| \frac{1}{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon \right).$$

In corrispondenza del numero reale positivo δ_1 , la $(6.1.25)$ ci fornisce un numero reale positivo δ tale che

$$(6.1.27) \qquad \forall y \in f(X) \qquad (|y - f(x_0)| < \delta) \Rightarrow (|f^{-1}(y) - x_0| < \delta_1)\,.$$

Consideriamo ora un qualsiasi $y \in f(X)$ tale che $0 < |y - f(x_0)| < \delta$. Ponendo $x = f^{-1}(y)$, dalla (6.1.27) otteniamo $|x - x_0| < \delta_1$. Inoltre risulta $x \neq x_0$. Infatti, supponiamo per assurdo che $x = x_0$. Ne segue $y = f(x) = f(x_0)$. Ciò è assurdo, poiché $0 < |y - f(x_0)|$.
Pertanto, $0 < |x - x_0| < \delta_1$; quindi dalla $(6.1.26)$ segue che

$$\left| \frac{1}{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon$$

da cui

$$\left| \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon$$

da cui

$$\left|\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}\big(f(x_0)\big)}{y - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)}\right| < \varepsilon \, . \ \diamond$$

Passiamo ora allo studio delle derivate e dei differenziali di ordine superiore.

Definizione 6.1.2 Consideriamo una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, con derivata $f': X' \subseteq X \to \mathbb{R}$. Se esiste la derivata $(f')'$ di f', la denotiamo col simbolo f'' e la chiamiamo *derivata seconda di* f. Pertanto

$$f'' = (f')' \ : \ X'' \subseteq X' \to \mathbb{R} \ . \ \diamond \tag{6.1.28}$$

Definizione 6.1.3 Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Per induzione, la *derivata* n*-esima* (anche detta *derivata di ordine n*) $f^{(n)}$ di f viene definita come derivata prima della derivata $f^{(n-1)}$ di ordine $n-1$ di f . Pertanto

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \ : \ X^{(n)} \subseteq X^{(n-1)} \to \mathbb{R} \ . \ \diamond \tag{6.1.29}$$

Osservazione 6.1.7 Ovviamente, la derivata n-esima di una funzione f in un punto, oppure in un sottoinsieme di X , può esistere oppure non esistere. ⋄

Definizione 6.1.4 Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x \in X$. Chiamiamo *differenziale* (oppure *differenziale primo*) *di* f *in* x, e denotiamo con il simbolo df, il polinomio di primo grado

(6.1.30) $$df \;:\; dx \in \mathbb{R} \to df(dx) = f'(x) \cdot dx \,.$$ ⋄

Osservazione 6.1.8 Avvertiamo che, nella (6.1.30), dx è spesso chiamato *differenziale di* x. ⋄

Definizione 6.1.5 Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in X$. Chiamiamo *incremento* Δf *di* f *in* x la funzione

(6.1.31) $$\Delta f \;:\; dx \in \mathbb{R} \to \Delta f(dx) = f(x + dx) - f(x) \,.$$ ⋄

Osservazione 6.1.9 Evidenziamo che Δf e df sono entrambi infinitesimi in 0. ⋄

Teorema 6.1.8 *Supponiamo che*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *è derivabile in* $x \in X$.

In tali ipotesi, $\Delta f - df$ *nel punto* 0 *è un infinitesimo di ordine maggiore di* 1 *, i.e.* [6.1.1]

(6.1.32) $$\lim_{dx \to 0} \frac{\Delta f(dx) - df(dx)}{dx} = 0 \,.$$

Dimostrazione. Infatti, risulta

$$\lim_{dx \to 0} \frac{\Delta f(dx) - df(dx)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \left(\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} - f'(x) \right) = 0 \;. \diamond$$

Osservazione 6.1.10 Il teorema 6.1.8 consente di approssimare, in un conveniente intorno di $x \in X$, una qualsiasi funzione f derivabile in x. Per ottenere questo risultato

- consideriamo una qualsiasi funzione $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $x \in X$
- consideriamo un intorno I_x di x
- *linearizziamo* (in I_x) la funzione f, i.e. approssimiamo (in I_x) f sostituendo ad f la tangente t nel punto $\big(x, f(x)\big)$ del *diagramma Cartesiano di* f (fig. 6.1.2)
- osserviamo (in fig. 6.1.2) che il punto di t avente ascissa $x + dx$ ha ordinata $t(x+dx) = f(x) + tg\,\alpha \cdot dx = f(x) + f'(x) \cdot dx =$

[6.1.1] Si veda la definizione 5.1.46.

$f(x) + df(dx)$

- chiamiamo *errore della approssimazione* la funzione

$$e \ : \quad x + dx \in I_x \cap X \to e(x + dx) = f(x + dx) - t(x + dx) =$$

$$f(x + dx) - f(x) - df(dx) = \Delta f(dx) - df(dx)$$

- rileviamo che in fig. 6.1.2 il segmento P_2P_4 ha lunghezza $t(x + dx)$, il segmento P_1P_4 ha lunghezza $f(x + dx)$, il segmento P_1P_2 ha lunghezza $e(x + dx)$, il segmento P_1P_3 ha lunghezza $df(dx) = f'(x) \cdot dx$, il segmento P_5P_4 (o P_6P_3) ha lunghezza dx, il segmento P_3P_4 (o P_6P_5) ha lunghezza $f(x)$
- osserviamo che l'errore e è infinitesimo in 0 e che, per il teorema 6.1.8, tende a zero più velocemente dell'ampiezza dell'intorno I_x .

Pertanto, in un conveniente intorno di x , l'errore di linearizzazione è trascurabile. ◊

Osservazione 6.1.11 Evidenziamo che, poiché la (6.1.30) stabilisce che

$$df = f'(x) \cdot dx ,$$

risulta

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \quad . \tag{6.1.33}$$

Pertanto, *la derivata di una funzione* f *rispetto alla variabile* x *è eguale al rapporto dei corrispondenti differenziali.* ◊

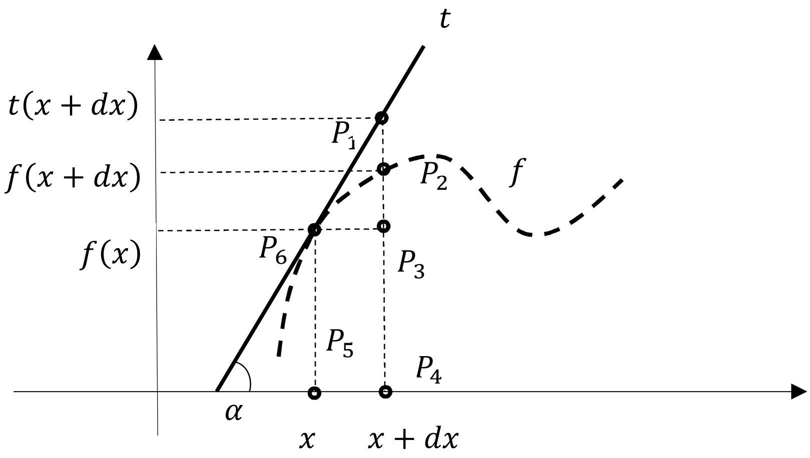

Fig. 6.1.2

Definizione 6.1.6 Sia $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x \in X$. Per induzione, chiamiamo *differenziale* n-esimo (o *differenziale di ordine* n) *di* f *in* x , e denotiamo con il simbolo $d^n f$, il polinomio di grado n

(6.1.34) $$d^n f = d(d^{n-1} f) = d\big(f^{(n-1)}(x) \cdot dx^{n-1}\big) = f^{(n)}(x) \cdot dx^n$$

dove dx^n significa $(dx)^n$. ◊

Osservazione 6.1.12 Dalla (6.1.34) si trae che *la derivata* n-*esima di una funzione* f *è eguale al rapporto tra* $d^n f$ *e* $(dx)^n$, i.e.

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} \ . \ \diamond \tag{6.1.35}$$

6.1.2 Teoremi del valor medio

Definizione 6.1.7 Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che f ha un *massimo relativo nel punto* $x_0 \in X$ se

$$\exists\, I_{x_0} \ : \quad \forall x \in I_{x_0} \cap X \qquad f(x) \leq f(x_0) \ . \ \diamond \tag{6.1.36}$$

Definizione 6.1.8 Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che f ha un *massimo relativo proprio nel punto* $x_0 \in X$ se

$$\exists\, I_{x_0} \ : \quad \forall x \in I_{x_0} \cap X - \{x_0\} \qquad f(x) < f(x_0) \ . \ \diamond \tag{6.1.37}$$

Definizione 6.1.9 Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che f ha un *minimo relativo nel punto* $x_0 \in X$ se

$$\exists\, I_{x_0} \ : \quad \forall x \in I_{x_0} \cap X \qquad f(x) \geq f(x_0) \ . \ \diamond \tag{6.1.38}$$

Definizione 6.1.10 Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che f ha un *minimo relativo proprio nel punto* $x_0 \in X$ se

$$\exists\, I_{x_0} \;:\quad \forall x \in I_{x_0} \cap X - \{x_0\} \qquad f(x) > f(x_0)\ . \tag{6.1.39}$$ ◊

Definizione 6.1.11 Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il massimo relativo ed il minimo relativo sono chiamati anche *estremi relativi*. ◊

Teorema 6.1.9 [*Fermat* [6.1.2]] *Supponiamo che*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *ha un estremo relativo in* $x_0 \in X$
- f *è derivabile in* x_0 .

In tali ipotesi

- *se* x_0 *è punto di accumulazione per* X *sia a destra che a sinistra, risulta*

$$f'(x_0) = 0\ ; \tag{6.1.40}$$

- *se* x_0 *è punto di accumulazione per* X *, ma non è punto di*

[6.1.2] *Pierre Fermat*, Beaumont-de-Lomagne (France) 1601 – Castres 1665.

accumulazione a destra, e se x_0 *è punto di massimo relativo, risulta*

(6.1.41) $$f'(x_0) \geq 0\,;$$

- *se* x_0 *è punto di accumulazione per* X *, ma non è punto di accumulazione a destra, e se* x_0 *è punto di minimo relativo, risulta*

(6.1.42) $$f'(x_0) \leq 0\,;$$

- *se* x_0 *è punto di accumulazione per* X *, ma non è punto di accumulazione a sinistra, e se* x_0 *è punto di massimo relativo, risulta*

(6.1.43) $$f'(x_0) \leq 0\,,$$

- *se* x_0 *è punto di accumulazione per* X *, ma non è punto di accumulazione a sinistra, e se* x_0 *è punto di minimo relativo, risulta*

(6.1.44) $$f'(x_0) \geq 0\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che

- ✓ x_0 è punto di accumulazione per X sia a destra che a sinistra
- ✓ x_0 è punto di massimo relativo per f .

Per dimostrare la (6.1.40), ragionando per assurdo supponiamo che $f'(x_0) > 0$. Quindi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \,,$$

quindi, per il teorema 5.1.11

(6.1.45) $\quad \exists\, I_{x_0} \;:\; \forall x \in I_{x_0} \cap X - \{x_0\} \qquad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \,.$

Inoltre, per ipotesi

(6.1.46) $\quad \exists\, J_{x_0} \;:\; \forall x \in J_{x_0} \cap X - \{x_0\} \qquad f(x) \le f(x_0) \,.$

Per la definizione 3.1.7 e per il teorema 3.1.8, esiste un $r \in \,]0, +\infty[$ tale che $N_{x_0} = \,]x_0 - r, x_0 + r[\, \subseteq I_{x_0} \cap J_{x_0}$. Quindi, N_{x_0} è un intorno di x_0 e, tenendo conto delle (6.1.45) e (6.1.46), risulta

(6.1.47) $\quad \forall x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\} \qquad \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \\ f(x) \le f(x_0) \,. \end{cases}$

Per ipotesi, x_0 è punto di accumulazione a destra per X . In conseguenza

esiste $z \in [x_0, x_0 + r[\cap X - \{x_0\} \subseteq N_{x_0} \cap X - \{x_0\}$. Pertanto $z > x_0$ e, per la (6.1.47), risultano simultaneamente vere le diseguaglianze $f(z) > f(x_0)$ e $f(z) \leq f(x_0)$. Ciò è assurdo. Ne consegue che la diseguaglianza $f'(x_0) > 0$ è impossibile.
Un ragionamento perfettamente analogo dimostra che anche la diseguaglianza $f'(x_0) < 0$ è impossibile. Così operando, abbiamo dimostrato che la (6.1.40) è vera.
Se l'estremo relativo di f è un minimo relativo, con un ragionamento perfettamente analogo al precedente è possibile dimostrare che anche in questo caso la (6.1.40) è vera.
Dopo di ciò, è facile ottenere, ragionando per assurdo in modo simile al precedente, le altre dichiarazioni, i.e. le (6.1.41), (6.1.42), (6.1.43), (6.1.44). ◊

Le funzioni reali derivabili in intervalli hanno le seguenti, notevoli proprietà.

Teorema 6.1.10 [*Rolle*] *Supponiamo che*

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
- $f: [a, b] \to \mathbb{R}$
- f *è continua in* $[a, b]$
- f *è derivabile in* $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$.

In tali ipotesi, esiste $c \in]a,b[$ *tale che* $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Poiché $[a,b]$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$, per il teorema 5.3.6 esistono $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ ed $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Ovviamente

(6.1.48) $\qquad \forall x \in [a,b] \qquad m \le f(x) \le M$.

Se $m = M$, la (6.1.48) implica che f è costante, sicché per ogni $c \in]a,b[$ risulta $f'(c) = 0$.
Se $m \neq M$, ovviamente risulta $m < M$. Siano h , k due punti di $[a,b]$ tali che $m = f(h)$, $M = f(k)$. Per ipotesi $f(a) = f(b)$. Quindi almeno uno dei punti a , b appartiene ad $]a,b[$. Chiamiamo c tale punto ed osserviamo che

- c è un punto di estremo assoluto per f e come tale è anche punto di estremo relativo per f
- $c \in]a,b[$, sicché f è derivabile in c
- $c \in]a,b[$ e di conseguenza è punto di accumulazione per $[a,b]$ sia a destra che a sinistra.

Pertanto, per il teorema 6.1.9, risulta $f'(c) = 0$. ◊