CAPITOLO 8

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI ◊

8.1 Successioni di funzioni

8.1.1 Uniforme convergenza

Definizione 8.1.1 Siano

- $X \subseteq \mathbb{R}$
- $\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad f_n : X \to \mathbb{R}$.

Diciamo che la successione di funzioni $\{f_n\}$ *converge su* X (o *converge puntualmente su* X) se $\forall\, x \in X$ la successione numerica $\{f_n(x)\}$ converge, *i.e.* se

(8.1.1) $$\forall\, x \in X \qquad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} . \ \diamond$$

◊ A. Maceri, *Successioni e Serie di funzioni*, e-ISBN 978-88-85929-83-8, © Accademica 2021

Definizione 8.1.2 Siano

- $X \subseteq \mathbb{R}$
- $\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad f_n \,:\, X \to \mathbb{R}$
- $\{f_n\}$ convergente su X
- $f \,:\, x \in X \to f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$.

In tali ipotesi, diciamo che f è il *limite* (o la *funzione limite*) della successione $\{f_n\}$. ◊

Osservazione 8.1.1 Siano

- $X \subseteq \mathbb{R}$
- $\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad f_n \,:\, X \to \mathbb{R}$
- $\{f_n\}$ convergente su X .

Ovviamente, le dichiarazioni seguenti sono equivalenti

(8.1.2) $\qquad f \,:\, x \in X \to f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$

(8.1.3) $\qquad \forall x \in X$ si ha che $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n \in \mathbb{N}$

$$(n > \nu) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \quad .$$ ◊

Definizione 8.1.3 Siano

- $X \subseteq \mathbb{R}$
- $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f_n : X \to \mathbb{R}$.

Diciamo che $\{f_n\}$ *converge uniformemente su* X se

(8.1.4) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \nu \in \mathbb{N} : \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \forall\, x \in X$

$$(n > \nu) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \; . \; \diamond$$

Osservazione 8.1.2 Ovviamente, ogni successione di funzioni uniformemente convergente è anche convergente. Semplici esempi dimostrano che il viceversa è falso. ⋄

Teorema 8.1.1 *Siano*

- $X \subseteq \mathbb{R}$
- $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f_n : X \to \mathbb{R}$
- $\{f_n\}$ *uniformemente convergente su* X
- $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *un punto di accumulazione per* X
- $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \to x_0} f_n(x) \in \mathbb{R}$.

In tali ipotesi, risulta che

(8.1.5) *la successione numerica* $\left\{\lim_{x \to x_0} f_n(x)\right\}$ *converge*

(8.1.6) $f = \lim_{x \to x_0} f_n$ *converge in* x_0

(8.1.7) $$\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) .$$

Dimostrazione. Ci limitiamo a considerare il caso $x_0 \in \mathbb{R}$, poiché nel caso $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$ possiamo ragionare in modo perfettamente analogo. Tanto premesso, per dimostrare la (8.1.5), usiamo il criterio di convergenza di *Cauchy* per le successioni numeriche (*i.e.* il teorema 4.1.30). Pertanto, ponendo

(8.1.8) $$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad l_n = \lim_{x \to x_0} f_n(x) ,$$

basta dimostrare che

(8.1.9) $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \, : \; \forall n, m \in \mathbb{N}$$
$$(n > \nu \quad \text{e} \quad m > \nu) \Rightarrow (|l_n - l_m| < \varepsilon) .$$

Sia $\varepsilon > 0$. Per l'uniforme convergenza di $\{f_n\}$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\forall\, x \in X$ risulta $(n > \nu) \Rightarrow \left(|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}\right)$. Quindi, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ tali che $n > \nu$ e $m > \nu$, risulta $\forall\, x \in$

$X \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Questo risultato, facendo tendere x a x_0 , fornisce immediatamente $|l_n - l_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Ora la (8.1.5) è vera e quindi possiamo porre

(8.1.10) $$\lim_{n \to +\infty} l_n = l \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, per conseguire le (8.1.6) e (8.1.7) basta dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\,,$$

i.e. , che

(8.1.11) $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ \forall x \in X$$
$$(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)\,.$$

Preliminarmente osserviamo che, per l'uniforme convergenza di $\{f_n\}$

(8.1.12) $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu_1 \in \mathbb{N} \ : \ \forall\, x \in X \quad \text{e} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$
$$(n > \nu_1) \Rightarrow \left(|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\right)\,;$$

che, per la (8.1.10)

(8.1.13) $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu_2 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu_2) \Rightarrow \left(|l_n - l| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$;

che, per la (8.1.8), ponendo $\nu = \max\{\nu_1 , \nu_2\}$, risulta $\lim\limits_{x \to x_0} f_{\nu+1}(x) = l_{\nu+1}$, *i.e.*

(8.1.14) $\quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ \forall\, x \in X$

$$(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow \left(|f_{\nu+1}(x) - l_{\nu+1}| < \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Ora possiamo costruire la (8.1.11). Sia $\varepsilon > 0$. La (8.1.14) ci fornisce $\delta > 0$. Sia $x \in X$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$. Osserviamo che

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_{\nu+1}(x)| + |f_{\nu+1}(x) - l_{\nu+1}| + |l_{\nu+1} - l|$$

e che

- poiché $\nu + 1 > \nu \geq \nu_1$, per la (8.1.12) risulta
$$|f_{\nu+1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

- per la (8.1.14), risulta $|f_{\nu+1}(x) - l_{\nu+1}| < \frac{\varepsilon}{3}$

- poiché $\nu + 1 > \nu \geq \nu_2$, per la (8.1.12) risulta $|l_n - l| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Quindi $|f(x) - l| < \varepsilon$. ◊

Osservazione 8.1.3 Dal teorema 8.4.1 segue immediatamente che la funzione limite di una successione uniformemente convergente di funzioni continue, è continua. ◊

Teorema 8.1.2 [*criterio di Cauchy*] *Siano*

- $X \subseteq \mathbb{R}$
- $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f_n : X \to \mathbb{R}$.

Le dichiarazioni seguenti sono equivalenti

(8.1.15) $\{f_n\}$ *è uniformemente convergente*

(8.1.16) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \nu \in \mathbb{N} : \;\; \forall\, n, m \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \forall\, x \in X$

$$(n > \nu \quad \text{e} \quad m > \nu) \Rightarrow (|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon) .$$

Dimostrazione. (8.1.15) ⇒ (8.1.16). Denotiamo con f la funzione limite di $\{f_n\}$. Per ipotesi

(8.1.17) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \nu \in \mathbb{N} : \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \forall\, x \in X$

$$(n > \nu) \Rightarrow \left(|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right) .$$

Per costruire la (8.1.16), consideriamo un qualsiasi $\varepsilon > 0$. Assumiamo l'intero positivo ν dato dalla (8.1.17), poi scegliamo un qualsiasi $x \in X$ e due qualsiasi $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $n > \nu$ e $m > \nu$. Risulta

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

(8.1.16) $\Rightarrow$ (8.1.15). Per il criterio di convergenza di *Cauchy* (teorema 4.1.30), $\forall\, x \in X$ la successione numerica $\{f_n(x)\}$ converge. Ponendo

$$f = \lim_{n \to +\infty} f_n ,$$

dobbiamo dimostrare che $\{f_n\}$ è uniformemente convergente, *i.e.* che

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu \in \mathbb{N} : \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \forall\, x \in X$$
$$(n > \nu) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) .$$

Pertanto, sia $\varepsilon > 0$. Per la (8.1.16), $\exists\, \nu \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall\, x \in X$ e $\forall\, n \in \mathbb{N}$ con $n > \nu$, risulta

$$\text{(8.1.18)} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N} \quad \text{con} \quad m > \nu \qquad |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

La (8.1.18), quando m tende a $+\infty$, ci dà $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

e quindi la $(8.1.15)$ è vera. ◊

Teorema 8.1.3 *Siano*

- $a\,, b \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f_n \,:\, [a,b] \to \mathbb{R}$
- $\{f_n\}$ *uniformemente convergente.*

In tali ipotesi, ponendo $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$, *la successione di funzioni* $\left\{\int_a^x f_n(t)\,dt\right\}$ *converge uniformemente a* $\int_a^x f(t)\,dt$ *su* $[a,b]$, *i.e., uniformemente*

$$(8.1.19) \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x \lim_{n\to+\infty} f_n\,(t)\,dt\,.$$

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che f è continua e che quindi esiste

$$g \,:\, x \in [a,b] \;\to\; \int_a^x \lim_{n\to+\infty} f_n\,(t)\,dt\,.$$

Per ipotesi,

(8.1.20) $\qquad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu \in \mathbb{N} : \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \forall\, x \in [a, b]$

$$(n > \nu) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)\,.$$

Dobbiamo dimostrare che

(8.1.21) $\qquad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall\, x \in [a, b]$

e $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \nu$, risulta $\left|\int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| < \varepsilon\,.$

Per costruire la (8.1.21), scegliamo un qualsiasi $\varepsilon > 0$. In corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ la (8.1.20) ci dà $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $t \in [a, b]$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \nu$, risulta

(8.1.22) $$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,.$$

Quindi, per ogni $x \in [a, b]$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \nu$, per la (8.1.22) risulta

$$\left|\int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^x [f_n(t) - f(t)]\,dt\right|$$

$$\le \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,dt \le \int_a^x \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,dt \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,. \quad \diamond$$

Osservazione 8.1.4 Noti controesempi mostrano che per successioni uniformemente convergenti di funzioni derivabili su $[a, b]$, può non esser vero che $\forall\, x \in [a, b]$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' . \;\diamond$$

8.2 Serie di funzioni

8.2.1 Uniforme convergenza

Definizione 8.2.1 Siano

- $X \subseteq \mathbb{R}$
- $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f_n : X \to \mathbb{R}$.

Chiamiamo *serie di funzioni su* X *di termine generale* f_n la somma

$$(8.2.1) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = f_1 + \cdots + f_n + \cdots \quad . \;\diamond$$

Definizione 8.2.2 Siano

- $X \subseteq \mathbb{R}$
- $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f_n : X \to \mathbb{R}$.

Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ (di funzioni su X) è *convergente* se $\forall\, x \in X$ la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è convergente.

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ è una serie convergente (di funzioni su X), chiamiamo

- *somma parziale della serie* la funzione

$$S_n \;:\; x \in X \;\to\; \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

- *somma della serie* la funzione

$$f \;:\; x \in X \;\to\; \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \quad . \;\diamond$$

Osservazione 8.2.1 Ovviamente, se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ è una serie (di funzioni su X) convergente, allora

$$\forall\, x \in X \qquad f(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$$

i.e.

(8.2.2) $\forall\, x \in X$ e $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \in \mathbb{N}$