CAPITOLO 6

DERIVAZIONE

6.1 Derivazione di funzioni reali di una variabile reale

6.1.1 Derivata

Definizione 6.1.1 Siano

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X.

Chiamiamo *rapporto incrementale di* f *in* x_0 la funzione

(6.1.1) $$x \in X - \{x_0\} \quad \to \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ .$$

Evidentemente x_0 è anche un punto di accumulazione per $X - \{x_0\}$. Se esiste il limite in x_0 del rapporto incrementale di f in x_0 e se tale limite è un numero reale, chiamiamo tale limite *derivata della funzione* f *in* x_0 , e la denotiamo col simbolo $f'(x_0)$. Pertanto,

(6.1.2) $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ .$$

Denotiamo con $X' \subseteq X$ l'insieme dei punti x_0 in cui esiste il limite (6.1.2). Chiamiamo *derivata* (o *derivata prima*) di f , e denotiamo col simbolo f' (oppure col simbolo $\frac{d}{dx}f$ oppure col simbolo $\frac{df}{dx}$), la funzione reale di una variabile reale

$$f' \, : \, x_0 \in X' \subseteq X \to f'(x_0) \in \mathbb{R} \, . \; \diamond$$

Osservazione 6.1.1 Se f' è definita in un punto x_0, diciamo che f è *derivabile in* x_0 . Se f' è definita in ogni punto di un insieme $X' \subseteq X$, diciamo che f è *derivabile in* X'. ⋄

Teorema 6.1.1 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $x_0 \in X$ *un punto di accumulazione per* X.

In tali ipotesi le dichiarazioni seguenti sono equivalenti:

(6.1.3) $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(6.1.4) $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \; .$$

Dimostrazione. Ovvio. ⋄

Osservazione 6.1.2 La derivata (6.1.2) ha una *interpretazione geometrica* che è molto importante per le applicazioni.
Sia f una funzione che trasforma $X \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Sia O, x, y, in un qualsiasi piano, un *riferimento Cartesiano ortogonale*. Consideriamo, per ogni $x \in X$, il punto P del piano di ascissa

x e ordinata $y = f(x)$. Al variare di x in X , il punto $P = (x, f(x))$ descrive nel piano un insieme di punti chiamato *diagramma Cartesiano della funzione* f .

Siano (fig. 6.1.1)

- x_0 un punto di X in cui f è derivabile
- x un qualsiasi punto di X distinto da x_0
- $s(x)$ la retta passante per $(x_0, f(x_0))$ e *secante*, nel punto $(x, f(x))$, il *diagramma Cartesiano* della funzione f
- t_0 la retta *tangente* al *diagramma Cartesiano* nel punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Con ogni evidenza, il *coefficiente angolare* $\operatorname{tg} \alpha(x)$ della retta secante è proprio il rapporto incrementale di f in x_0 :

$$\operatorname{tg} \alpha(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad .$$

Supponiamo f *derivabile in* x_0 . E' palese in fig. 6.1.1 che, quando x tende a x_0 , la secante $s(x)$ tende alla tangente t_0 . Pertanto risulta

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \, .$$

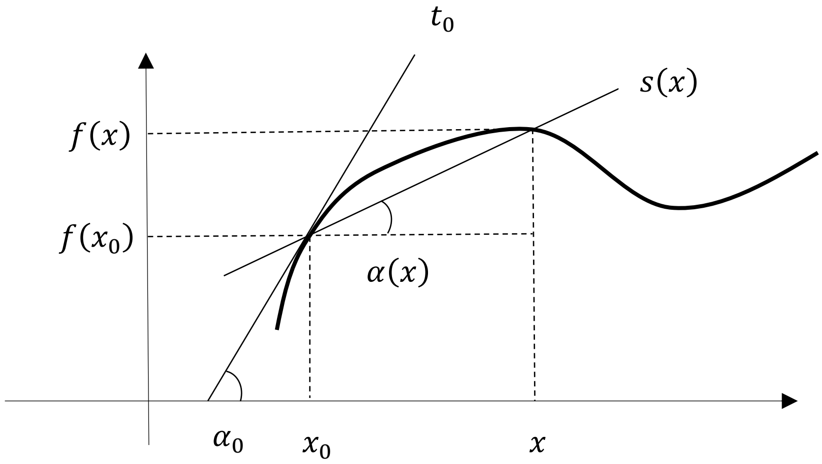

Fig. 6.1.1

Da quanto sopra emerge che, *se diciamo che* f *è derivabile in* x_0 *e che il valore della derivata in* x_0 *è* $f'(x_0)$*, geometricamente stiamo dicendo che*

- *il diagramma Cartesiano della funzione* f *nel punto* $(x_0, f(x_0))$ *ha una tangente* t_0 *il cui coefficiente angolare è* $tg\ \alpha_0 = f'(x_0)$
- quando x tende a x_0, allora la secante $s(x)$, passante per $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$, tende alla tangente t_0. ◊

Osservazione 6.1.3 E' ovvio che una qualsiasi funzione *costante* è derivabile in ogni punto del suo insieme di definizione e che la sua derivata è identicamente pari a zero. ◊

Teorema 6.1.2 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *derivabile in* $x_0 \in X$.

In tali ipotesi, f *è continua in* x_0 .

Dimostrazione. Risulta

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0) \big) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \cdot (x - x_0) \, .$$

Quindi, per il teorema 5.1.30

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0) \big) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \, ,$$

quindi, per il teorema 5.1.29

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \; . \; \diamond$$

Osservazione 6.1.4 Si noti che l'inverso del teorema 6.1.2 è falso. Infatti, la funzione *valore assoluto*

$$x \in \mathbb{R} \quad \to \quad |x| \in [0, +\infty[$$

è continua in 0, ma il suo rapporto incrementale nel punto 0 non ammette limite per $x \to 0$. Infatti

$$\frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \,]0, +\infty[\\ -1 & \text{se } x \in \,]-\infty, 0[\end{cases}$$

ed in conseguenza

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = 1 \ . \ \diamond$$

Quanto alla derivata della funzione somma, si ha quanto segue.

Teorema 6.1.3 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $g: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *e* g *derivabili in* $x_0 \in X$.

In tali ipotesi, $f+g$ *è derivabile in* x_0 *e risulta*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \ . \tag{6.1.5}$$

Dimostrazione. Dal teorema 5.1.29 segue che

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$+ \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0) \ . \ \diamond$$

Circa la derivata della funzione prodotto, si ha quanto segue.

Teorema 6.1.4 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $g: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *e* g *derivabili in* $x_0 \in X$.

In tali ipotesi, $f \cdot g$ *è derivabile in* x_0 *e risulta*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) . \tag{6.1.6}$$

Dimostrazione. Dai teoremi 5.1.29, 5.1.30 e dall'ipotesi di continuità, segue che

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) g(x) + f(x_0) \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \right]$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) . \diamond$$

Osservazione 6.1.5 Siano

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $g: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *e* g *derivabili in* $x_0 \in X$

- $g(x_0) \neq 0$.

In tali ipotesi, è ovvio che esiste un intorno di x_0 nel quale $\frac{f}{g}$ è definita e che x_0 è un punto di accumulazione per l'insieme di definizione di $\frac{f}{g}$. ◊

Circa la derivata della funzione rapporto, sussiste il seguente teorema.

Teorema 6.1.5 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $g: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *e* g *derivabili in* $x_0 \in X$
- $g(x_0) \neq 0$.

In tali ipotesi, $\frac{f}{g}$ *è derivabile in* x_0 *e risulta*

$$(6.1.7) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} .$$

Dimostrazione. Dai teoremi 6.1.2, 5.1.29, 5.1.30, 5.1.33 e dalle ipotesi segue che

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \right) \right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left[\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) g(x_0) - f(x) \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{g^2(x_0)} \big(f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) \big)$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} . \ \diamond$$

Osservazione 6.1.6 Consideriamo la *funzione identica*

$$f \ : \ x \in \mathbb{R} \to f(x) = x \, .$$

E' immediato verificare che $\forall x \in \mathbb{R}$ risulta $f'(x) = 1$ e che, applicando ripetutamente la (6.1.6), la funzione

$$f \ : \ x \in \mathbb{R} \to f(x) = x^n \, ,$$

dove $n \in \mathbb{N}$, è derivabile in $\mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$ risulta

$$f'(x) = n \, x^{n-1} . \ \diamond$$

Circa la derivata della funzione composta, si ha quanto segue.

Teorema 6.1.6 *Supponiamo che*

- $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $g : f(X) \to \mathbb{R}$
- $x_0 \in X$

- x_0 *è un punto di accumulazione per* X
- $f(x_0)$ *è un punto di accumulazione per* $f(X)$
- f *è derivabile in* x_0
- g *è derivabile in* $f(x_0)$.

In tali ipotesi, la funzione composta $g \circ f$ *è derivabile in* x_0 *e risulta*

(6.1.8) $$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)\, f'(x_0)\,.$$

Dimostrazione. Per conseguire la (6.1.8), dobbiamo dimostrare che

(6.1.9) $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists H_{x_0} \;:\quad \forall x \in X \cap H_{x_0} - \{x_0\}$$
$$\left| \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{x - x_0} - g'\big(f(x_0)\big) f'(x_0) \right| < \varepsilon\,.$$

Per ipotesi, g è derivabile in $f(x_0)$, quindi

(6.1.10) $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \;:$$
$$\forall y \in f(X) \qquad (0 < |y - f(x_0)| < \delta_1)$$
$$\Rightarrow \left(\left| \frac{g(y) - g\big(f(x_0)\big)}{y - f(x_0)} - g'\big(f(x_0)\big) \right| < \varepsilon \right).$$

Per ipotesi, f è derivabile in x_0 , quindi

(6.1.11) $$\forall \rho > 0 \quad \exists W_{x_0} \;:\quad \forall x \in X \cap W_{x_0} - \{x_0\}$$
$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \rho\,.$$

Per il teorema 6.1.2, f è continua in x_0 , quindi

$$(6.1.12) \qquad \forall \beta > 0 \quad \exists J_{x_0} : \quad \forall x \in X \cap J_{x_0} - \{x_0\}$$
$$|f(x) - f(x_0)| < \beta \,.$$

I casi possibili sono $f'(x_0) \neq 0$ e $f'(x_0) = 0$.
Supponiamo $f'(x_0) \neq 0$. Per il teorema 5.1.11

$$\exists I_{x_0} : \quad \forall x \in X \cap I_{x_0} - \{x_0\} \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0 \,,$$

quindi

$$\exists I_{x_0} : \quad \forall x \in X \cap I_{x_0} - \{x_0\} \qquad f(x) - f(x_0) \neq 0 \,,$$

quindi

$$(6.1.13) \qquad \forall x \in X \cap I_{x_0} - \{x_0\}$$
$$\left| \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{x - x_0} - g'\big(f(x_0)\big) f'(x_0) \right|$$
$$= \left| \left(\frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{f(x) - f(x_0)} \right) \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) - g'\big(f(x_0)\big) f'(x_0) \right|$$
$$= \left| \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{f(x) - f(x_0)} f'(x_0) \right.$$
$$\left. + \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{f(x) - f(x_0)} f'(x_0) - g'\big(f(x_0)\big) f'(x_0) \right|$$
$$\leq \left| \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{f(x) - f(x_0)} \right| \cdot \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right|$$

$$+|f'(x_0)| \cdot \left| \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} - g'(f(x_0)) \right| .$$

Inoltre, in corrispondenza del numero reale positivo 1, per la (6.1.10) si ha che

$$(6.1.14) \quad \exists \delta_2 > 0 \; : \; \forall y \in f(X) \quad 0 < |y - f(x_0)| < \delta_2$$
$$\Rightarrow \left| \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} \right| + |g'(f(x_0))|$$
$$\leq \left| \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} - g'(f(x_0)) \right| < 1 + |g'(f(x_0))| .$$

Per ottenere la (6.1.9), si consideri ora un qualsiasi $\varepsilon \in]0, +\infty[$. Osserviamo che, in corrispondenza del numero reale positivo

$$\frac{\varepsilon}{2(1 + |g'(f(x_0))|)} ,$$

per la (6.1.11) si ha

$$(6.1.15) \qquad \exists W_{x_0} \; : \; \forall x \in X \cap W_{x_0} - \{x_0\}$$
$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |g'(f(x_0))|)} .$$

Inoltre, in corrispondenza del numero reale positivo

$$\frac{\varepsilon}{2|f'(x_0)|} ,$$

per la (6.1.10) si ha

$$(6.1.16) \qquad \exists \delta_1 > 0 \ : \ \forall y \in f(X) \qquad (0 < |y - f(x_0)| < \delta_1)$$
$$\Rightarrow \left(\left| \frac{g(y) - g\big(f(x_0)\big)}{y - f(x_0)} - g'\big(f(x_0)\big) \right| < \frac{\varepsilon}{2|f'(x_0)|} \right).$$

Inoltre, in corrispondenza del numero reale positivo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, per la (6.1.12) si ha

$$(6.1.17) \qquad \exists J_{x_0} \ : \quad \big(x \in X \cap J_{x_0} - \{x_0\}\big)$$
$$\Rightarrow \ (|f(x) - f(x_0)| < \delta \ ).$$

Con ogni evidenza, $H_{x_0} = I_{x_0} \cap W_{x_0} \cap J_{x_0}$ è un intorno di x_0 e per ogni $x \in X \cap H_{x_0} - \{x_0\}$, tenendo conto delle (6.1.13), (6.1.17), (6.1.14), (6.1.15), (6.1.16), si ha

$$\left| \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{x - x_0} - g'\big(f(x_0)\big) f'(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \, .$$

Pertanto, se $f'(x_0) \neq 0$, la (6.1.8) è vera.
Supponiamo ora $f'(x_0) = 0.$ Ovviamente la (6.1.9) diventa

$$(6.1.18) \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists H_{x_0} \ : \qquad \forall x \in X \cap H_{x_0} - \{x_0\}$$
$$\left| \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{x - x_0} \right| < \varepsilon \, .$$

Per conseguire la (6.1.18), consideriamo un qualsiasi $\varepsilon \in]0, +\infty[$. In corrispondenza del numero reale positivo 1, per la (6.1.10) si ha

$$(6.1.19) \qquad \exists \delta > 0 \ : \ \forall y \in f(X) \qquad (0 < |y - f(x_0)| < \delta)$$

$$\Rightarrow \left(\left|\frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)}\right| < 1 + |g'(f(x_0))|\right).$$

Inoltre, in corrispondenza del numero reale positivo δ, per la (6.1.12) si ha

$$(6.1.20) \qquad \exists J_{x_0} : \qquad (x \in X \cap J_{x_0} - \{x_0\}) \\ \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \delta).$$

Osserviamo che, in corrispondenza del numero reale positivo

$$\frac{\varepsilon}{1 + |g'(f(x_0))|} \quad ,$$

per la (6.1.11) si ha

$$(6.1.21) \qquad \exists W_{x_0} : \qquad \forall x \in X \cap W_{x_0} - \{x_0\} \\ \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| < \frac{\varepsilon}{1 + |g'(f(x_0))|}.$$

Evidentemente, $H_{x_0} = W_{x_0} \cap J_{x_0}$ è un intorno di x_0. Sia $x \in X \cap H_{x_0} - \{x_0\}$. Se $f(x) = f(x_0)$, ovviamente la (6.1.18) è vera. Se $f(x) \neq f(x_0)$, tenendo conto delle (6.1.20), (6.1.19), (6.1.21), si ha

$$\left|\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}\right| \\ = \left|\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}\right| \cdot \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right|$$

$$< \left(1+\left|g'\left(f(x_0)\right)\right|\right)\frac{\varepsilon}{1+\left|g'\left(f(x_0)\right)\right|}=\varepsilon$$

con il che la (6.1.18) è vera. ◊

Circa la derivata della funzione inversa, si ha quanto segue.

Teorema 6.1.7 *Supponiamo che*

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
- $f: [a, b] \to \mathbb{R}$
- f *è continua e strettamente monotona*
- $x_0 \in [a, b]$
- f *è derivabile in* x_0
- $f'(x_0) \neq 0$.

In tali ipotesi, la funzione inversa f^{-1} *è derivabile in* $f(x_0)$ *e risulta*

(6.1.22) $$(f^{-1})'\left(f(x_0)\right)=\frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Dimostrazione. Per conseguire la (6.1.22), dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{y\to f(x_0)}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}\left(f(x_0)\right)}{y-f(x_0)}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

i.e., che

$$(6.1.23) \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad \forall y \in f(X)$$

$$(0 < |y - f(x_0)| < \delta) \Rightarrow \left(\left| \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}\big(f(x_0)\big)}{y - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon \right).$$

Osserviamo preliminarmente che, per ipotesi, $f(x_0)$ è un punto di accumulazione per $f(X)$. Infatti sia $I_{f(x_0)}$ un qualsiasi intorno di $f(x_0)$. Poiché f è continua in x_0, $\exists\, J_{x_0}$ tale che $\forall x \in J_{x_0} \cap X - \{x_0\}$ risulta $f(x_0) \in I_{f(x_0)}$. Siccome x_0 è un punto di accumulazione per X, $\exists\, x_1 \in J_{x_0} \cap X - \{x_0\}$ e ciò implica $f(x_1) \in I_{f(x_0)}$. Poiché f è strettamente monotona, risulta $f(x_1) \neq f(x_0)$ e quindi $I_{f(x_0)} \cap f(X) - \{f(x_0)\} \neq \emptyset$.

Osserviamo ora che la funzione rapporto incrementale di f in x_0 converge verso un limite diverso da zero. In conseguenza

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\left(\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

i.e.

$$(6.1.24) \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_1 > 0 \quad : \quad \forall x \in X$$

$$(0 < |x - x_0| < \delta_1) \Rightarrow \left(\left| \frac{1}{\left(\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon \right).$$

Inoltre f^{-1} è continua, poiché è la funzione inversa di una funzione continua. Quindi

$$\lim_{y \to f(x_0)} f^{-1}(y) = f^{-1}\big(f(x_0)\big) = x_0$$

i.e.

$$(6.1.25) \qquad \forall \beta > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad \forall y \in f(X)$$
$$(|y - f(x_0)| < \delta) \Rightarrow (|f^{-1}(y) - x_0| < \beta)\,.$$

Ora possiamo costruire la (6.1.23). Sia ε un qualsiasi numero reale positivo. In corrispondenza di ε, la (6.1.24) ci fornisce un numero reale positivo δ_1 tale che $\forall x \in X$

$$(6.1.26) \qquad (0 < |x - x_0| < \delta_1)$$
$$\Rightarrow \left(\left| \frac{1}{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon \right).$$

In corrispondenza del numero reale positivo δ_1, la (6.1.25) ci fornisce un numero reale positivo δ tale che

$$(6.1.27) \qquad \forall y \in f(X) \qquad (|y - f(x_0)| < \delta)$$
$$\Rightarrow (|f^{-1}(y) - x_0| < \delta_1)\,.$$

Consideriamo ora un qualsiasi $y \in f(X)$ tale che $0 < |y - f(x_0)| < \delta$. Ponendo $x = f^{-1}(y)$, dalla (6.1.27) otteniamo $|x - x_0| < \delta_1$. Inoltre risulta $x \neq x_0$. Infatti, supponiamo per assurdo che $x = x_0$. Ne segue $y = f(x) = f(x_0)$. Ciò è assurdo, poiché $0 < |y - f(x_0)|$. Pertanto, $0 < |x - x_0| < \delta_1$; quindi dalla (6.1.26) segue che

$$\left| \frac{1}{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon$$

da cui

$$\left|\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)}\right| < \varepsilon$$

da cui

$$\left|\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}\big(f(x_0)\big)}{y - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)}\right| < \varepsilon\,. \ \diamond$$

Passiamo ora allo studio delle derivate e dei differenziali di ordine superiore.

Definizione 6.1.2 Consideriamo una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, con derivata $f': X' \subseteq X \to \mathbb{R}$. Se esiste la derivata $(f')'$ di f', la denotiamo col simbolo f'' e la chiamiamo *derivata seconda di* f. Pertanto

(6.1.28) $$f'' = (f')' \ : \ X'' \subseteq X' \to \mathbb{R}\,. \ \diamond$$

Definizione 6.1.3 Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Per induzione, la *derivata n-esima* (anche detta *derivata di ordine n*) $f^{(n)}$ di f viene definita come derivata prima della derivata $f^{(n-1)}$ di ordine $n-1$ di f . Pertanto

(6.1.29) $$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \ : \ X^{(n)} \subseteq X^{(n-1)} \to \mathbb{R}\,. \ \diamond$$

Osservazione 6.1.7 Ovviamente, la derivata n-esima di una funzione f in un punto, oppure in un sottoinsieme di X , può esistere oppure non esistere. $\diamond$

Definizione 6.1.4 Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x \in X$. Chiamiamo *differenziale* (oppure *differenziale primo*) *di* f *in* x , e denotiamo con il simbolo df , il polinomio di primo grado

(6.1.30) $$df \ : \ dx \in \mathbb{R} \to df(dx) = f'(x) \cdot dx \ . \ \diamond$$

Osservazione 6.1.8 Avvertiamo che, nella (6.1.30), dx è spesso chiamato *differenziale di* x . ◊

Definizione 6.1.5 Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in X$. Chiamiamo *incremento* Δf *di* f *in* x la funzione

(6.1.31) $$\Delta f \ : \ dx \in \mathbb{R} \to \Delta f(dx) = f(x + dx) - f(x) \ . \ \diamond$$

Osservazione 6.1.9 Evidenziamo che Δf e df sono entrambi infinitesimi in 0 . ◊

Teorema 6.1.8 *Supponiamo che*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *è derivabile in* $x \in X$.

In tali ipotesi, $\Delta f - df$ *nel punto* 0 *è un infinitesimo di ordine maggiore di* 1 *, i.e.* [6.1.1]

(6.1.32) $$\lim_{dx \to 0} \frac{\Delta f(dx) - df(dx)}{dx} = 0 \, .$$

Dimostrazione. Infatti, risulta

[6.1.1] Si veda la definizione 5.1.46.

$$\lim_{dx\to 0}\frac{\Delta f(dx)-df(dx)}{dx}$$
$$=\lim_{dx\to 0}\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}-f'(x)\right)=0\ .\ \diamond$$

Osservazione 6.1.10 Il teorema 6.1.8 consente di approssimare, in un conveniente intorno di $x\in X$, una qualsiasi funzione f derivabile in x. Per ottenere questo risultato

- consideriamo una qualsiasi funzione $f{:}\,X\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile in $x\in X$

- consideriamo un intorno I_x di x

- *linearizziamo* (in I_x) la funzione f, *i.e.* approssimiamo (in I_x) f sostituendo ad f la tangente t nel punto $\big(x,f(x)\big)$ del *diagramma Cartesiano di* f (fig. 6.1.2)

- osserviamo (in fig. 6.1.2) che il punto di t avente ascissa $x+dx$ ha ordinata $t(x+dx)=f(x)+tg\ \alpha\ \cdot dx=f(x)+f'(x)\cdot dx=f(x)+df(dx)$

- chiamiamo *errore della approssimazione* la funzione
$$e\ :\ x+dx\in I_x\cap X\to e(x+dx)$$
$$=f(x+dx)-t(x+dx)$$
$$=f(x+dx)-f(x)-df(dx)=\Delta f(dx)-df(dx)$$

- rileviamo che in fig. 6.1.2 il segmento P_2P_4 ha lunghezza $t(x+dx)$, il segmento P_1P_4 ha lunghezza $f(x+dx)$, il segmento P_1P_2 ha lunghezza $e(x+dx)$, il segmento P_1P_3 ha lunghezza $df(dx) = f'(x) \cdot dx$, il segmento P_5P_4 (o P_6P_3) ha lunghezza dx, il segmento P_3P_4 (o P_6P_5) ha lunghezza $f(x)$

- osserviamo che l'errore e è infinitesimo in 0 e che, per il teorema 6.1.8, tende a zero più velocemente dell'ampiezza dell'intorno I_x .

Pertanto, in un conveniente intorno di x , l'errore di linearizzazione è trascurabile. ⋄

Osservazione 6.1.11 Evidenziamo che, poiché la (6.1.30) stabilisce che

$$df = f'(x) \cdot dx \,,$$

risulta

(6.1.33) $$f'(x) = \frac{df}{dx} \ .$$

Pertanto, *la derivata di una funzione* f *rispetto alla variabile* x *è eguale al rapporto dei corrispondenti differenziali.* ⋄

Definizione 6.1.6 Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x \in X$. Per induzione, chiamiamo *differenziale* n-esimo (o *differenziale di ordine* n) *di* f *in* x , e denotiamo con il simbolo $d^n f$, il polinomio di grado n

(6.1.34) $$\begin{aligned} d^n f &= d(d^{n-1} f) \\ &= d\big(f^{(n-1)}(x) \cdot dx^{n-1}\big) = f^{(n)}(x) \cdot dx^n \end{aligned}$$

dove dx^n significa $(dx)^n$. ⋄

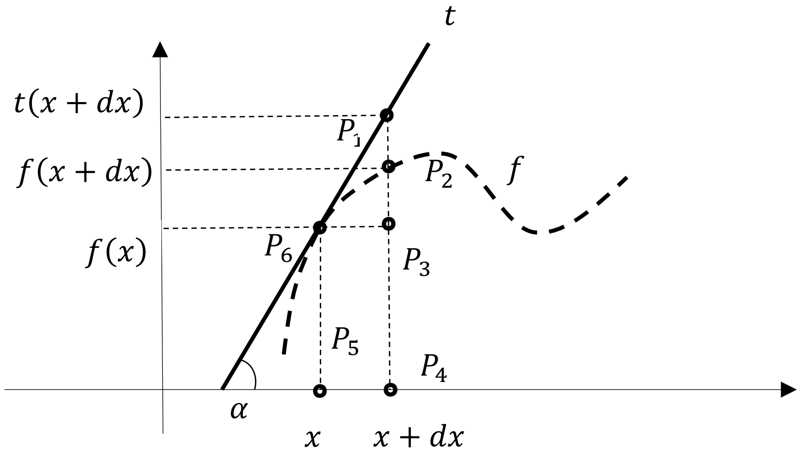

Fig. 6.1.2

Osservazione 6.1.12 Dalla (6.1.34) si trae che *la derivata* n-*esima di una funzione* f *è eguale al rapporto tra* $d^n f$ *e* $(dx)^n$, *i.e.*

(6.1.35) $$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} \ . \ \diamond$$

6.1.2 Teoremi del valor medio

Definizione 6.1.7 Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che f ha un *massimo relativo nel punto* $x_0 \in X$ se

(6.1.36) $$\exists\, I_{x_0} \ : \quad \forall x \in I_{x_0} \cap X \qquad f(x) \leq f(x_0) \ . \ \diamond$$

Definizione 6.1.8 Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che f ha un *massimo relativo proprio nel punto* $x_0 \in X$ se

(6.1.37) $\exists\, I_{x_0}\ :\ \forall x \in I_{x_0} \cap X - \{x_0\} \quad f(x) < f(x_0)$. ◊

Definizione 6.1.9 Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che f ha un *minimo relativo nel punto* $x_0 \in X$ se

(6.1.38) $\exists\, I_{x_0}\ :\ \forall x \in I_{x_0} \cap X \quad f(x) \geq f(x_0)$. ◊

Definizione 6.1.10 Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che f ha un *minimo relativo proprio nel punto* $x_0 \in X$ se

(6.1.39) $\exists\, I_{x_0}\ :\ \forall x \in I_{x_0} \cap X - \{x_0\} \quad f(x) > f(x_0)$. ◊

Definizione 6.1.11 Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il massimo relativo ed il minimo relativo sono chiamati anche *estremi relativi*. ◊

Teorema 6.1.9 [*Fermat* [6.1.2]] *Supponiamo che*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *ha un estremo relativo in* $x_0 \in X$
- f *è derivabile in* x_0 .

In tali ipotesi

- *se* x_0 *è punto di accumulazione per* X *sia a destra che a sinistra, risulta*

[6.1.2] *Pierre Fermat*, Beaumont-de-Lomagne (France) 1601 – Castres 1665.

(6.1.40) $$f'(x_0) = 0 \,;$$

- *se* x_0 *è punto di accumulazione per* X *, ma non è punto di accumulazione a destra, e se* x_0 *è punto di massimo relativo, risulta*

(6.1.41) $$f'(x_0) \geq 0 \,;$$

- *se* x_0 *è punto di accumulazione per* X *, ma non è punto di accumulazione a destra, e se* x_0 *è punto di minimo relativo, risulta*

(6.1.42) $$f'(x_0) \leq 0 \,;$$

- *se* x_0 *è punto di accumulazione per* X *, ma non è punto di accumulazione a sinistra, e se* x_0 *è punto di massimo relativo, risulta*

(6.1.43) $$f'(x_0) \leq 0 \,,$$

- *se* x_0 *è punto di accumulazione per* X *, ma non è punto di accumulazione a sinistra, e se* x_0 *è punto di minimo relativo, risulta*

(6.1.44) $$f'(x_0) \geq 0 \,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che

- x_0 è punto di accumulazione per X sia a destra che a sinistra

- x_0 è punto di massimo relativo per f .

Per dimostrare la (6.1.40) , ragionando per assurdo supponiamo che $f'(x_0) > 0$. Quindi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \,,$$

quindi, per il teorema 5.1.11

(6.1.45) $\quad \exists\, I_{x_0} \;:\; \forall x \in I_{x_0} \cap X - \{x_0\}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \,.$$

Inoltre, per ipotesi

(6.1.46) $\quad \exists\, J_{x_0} \;:\; \forall x \in J_{x_0} \cap X - \{x_0\} \qquad f(x) \le f(x_0)$.

Per la definizione 3.1.7 e per il teorema 3.1.8, esiste un $r \in]0, +\infty[$ tale che $N_{x_0} =]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq I_{x_0} \cap J_{x_0}$. Quindi, N_{x_0} è un intorno di x_0 e, tenendo conto delle (6.1.45) e (6.1.46), risulta

(6.1.47) $\quad \forall x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\} \qquad \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \\ f(x) \le f(x_0) \,. \end{cases}$

Per ipotesi, x_0 è punto di accumulazione a destra per X . In conseguenza esiste $z \in [x_0, x_0 + r[\cap X - \{x_0\} \subseteq N_{x_0} \cap X - \{x_0\}$. Pertanto $z > x_0$ e, per la (6.1.47), risultano simultaneamente vere le diseguaglianze $f(z) > f(x_0)$ e $f(z) \leq f(x_0)$. Ciò è assurdo. Ne consegue che la diseguaglianza $f'(x_0) > 0$ è impossibile.

Un ragionamento perfettamente analogo dimostra che anche la diseguaglianza $f'(x_0) < 0$ è impossibile. Così operando, abbiamo dimostrato che la (6.1.40) è vera.

Se l'estremo relativo di f è un minimo relativo, con un ragionamento perfettamente analogo al precedente è possibile dimostrare che anche in questo caso la (6.1.40) è vera.

Dopo di ciò, è facile ottenere, ragionando per assurdo in modo simile al precedente, le altre dichiarazioni, *i.e.* le (6.1.41), (6.1.42), (6.1.43), (6.1.44). ◊

Le funzioni reali derivabili in intervalli hanno le seguenti, notevoli proprietà.

Teorema 6.1.10 [*Rolle*] *Supponiamo che*

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
- $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$
- f *è continua in* $[a, b]$
- f *è derivabile in* $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$.

In tali ipotesi, esiste $c \in]a, b[$ *tale che* $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Poiché $[a, b]$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$, per il teorema 5.3.6 esistono $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$

ed $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$. Ovviamente

$$(6.1.48) \qquad \forall x \in [a,b] \qquad\qquad m \leq f(x) \leq M \,.$$

Se $m = M$, la (6.1.48) implica che f è costante, sicché per ogni $c \in \,]a,b[$ risulta $f'(c) = 0$.

Se $m \neq M$, ovviamente risulta $m < M$. Siano $h\,,k$ due punti di $[a,b]$ tali che $m = f(h)$, $M = f(k)$. Per ipotesi $f(a) = f(b)$. Quindi almeno uno dei punti $a\,,b$ appartiene ad $]a,b[$. Chiamiamo c tale punto ed osserviamo che

- c è un punto di estremo assoluto per f e come tale è anche punto di estremo relativo per f
- $c \in \,]a,b[$, sicché f è derivabile in c
- $c \in \,]a,b[$ e di conseguenza è punto di accumulazione per $[a,b]$ sia a destra che a sinistra.

Pertanto, per il teorema 6.1.9, risulta $f'(c) = 0$. ◊

Teorema 6.1.11 [*Lagrange* [6.1.3]] *Siano*

- $a\,,b \in \mathbb{R}\,,\quad a < b$
- $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$
- f *continua in* $[a,b]$
- f *derivabile in* $]a,b[$.

[6.1.3] *Joseph-Louis Lagrange*, Torino (Italia) 25.01.1736 – Paris 10.04.1813

In tali ipotesi, esiste $c \in \,]a,b[$ *tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \,. \tag{6.1.49}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione g che ad ogni $x \in [a,b]$ associa il numero reale

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \,.$$

Evidentemente g è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Inoltre, risulta $g(b) = g(a) = 0$. Quindi, per il teorema 6.1.10, esiste $c \in \,]a,b[$ tale che $g'(c) = 0$. Quindi

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \ .$$

Pertanto la (6.1.49) è vera. ◊

Teorema 6.1.12 [*Cauchy*] *Siano*

- $a\,, b \in \mathbb{R}\,, \quad a < b$
- $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$
- $g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$
- f *e* g *continue in* $[a,b]$
- f *e* g *derivabili in* $]a,b[$.

In tali ipotesi, esiste $c \in \,]a,b[$ *tale che*

(6.1.50) $$f'(c)\big(g(b)-g(a)\big)=g'(c)\big(f(b)-f(a)\big).$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione h che ad ogni $x\in[a,b]$ associa il numero reale

$$f(x)\big(g(b)-g(a)\big)-g(x)\big(f(b)-f(a)\big).$$

Evidentemente h è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Inoltre, risulta $h(a)=h(b)$. Quindi, per il teorema 6.1.10, esiste $c\in\,]a,b[$ tale che $h'(c)=0$. Quindi

$$f'(c)\big(g(b)-g(a)\big)-g'(c)\big(f(b)-f(a)\big)=0$$

sicché la (6.1.50) è vera. ◊

Teorema 6.1.13 *Siano*

- $a\,,b\in\mathbb{R}\,,\quad a<b$
- $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$
- f *continua in* $[a,b]$
- f *derivabile in* $]a,b[$
- $\forall x\in\,]a,b[\qquad f'(x)=0\,.$

In tali ipotesi

(6.1.51) $$\exists k\in\mathbb{R}\ :\quad f(x)=k\qquad\forall x\in[a,b].$$

Dimostrazione. Consideriamo un qualsiasi $x\in\,]a,b[$. Se $x=a$, risulta $f(x)=f(a)$. Se $x\neq a$, risulta $a<x$. Quindi, la *restrizione* di f ad $[a,x]$ soddisfa le ipotesi del

teorema 6.1.11. Conseguentemente, esiste $c \in \,]a, x[$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

quindi, essendo per ipotesi $f'(c) = 0$, risulta $f(x) = f(a)$. La (6.1.51) è così conseguita. ◊

Osservazione 6.1.13 Evidenziamo che il teorema 6.1.13 è valido solo per funzioni reali definite in intervalli. Altrimenti, una funzione definita in un generico insieme numerico X risulta costante solo a tratti, *i.e.* costante solo in ogni intervallo contenuto in X. ◊

Teorema 6.1.14 *Siano*

- $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$
- $f: [a, b] \to \mathbb{R}$
- $g: [a, b] \to \mathbb{R}$
- f *e* g *continue in* $[a, b]$
- f *e* g *derivabili in* $]a, b[$
- $\forall x \in \,]a, b[\quad f'(x) = g'(x)$.

In tali ipotesi, esiste $c \in \mathbb{R}$ *tale che*

(6.1.52) $\qquad \forall x \in [a, b] \qquad f(x) = g(x) + c$.

Dimostrazione. Osserviamo che la funzione $f - g$ soddisfa tutte le ipotesi del teorema 6.1.13. Pertanto, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che la (6.1.52) è vera. ◊

Teorema 6.1.15 *Siano*

- $a\,, b \in \mathbb{R}\,, \quad a < b$
- $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$
- f *continua in* $[a, b]$
- f *derivabile in* $]a, b[$
- $\forall x \in\,]a, b[\qquad f'(x) > 0\,.$

In tali ipotesi, f *è strettamente crescente in* $[a, b]\,.$

Dimostrazione. Consideriamo due qualsiasi $x_1\,, x_2 \in [a, b]$ tali che $x_1 < x_2$. Chiaramente, la restrizione di f a $[x_1, x_2]$ soddisfa le ipotesi del teorema 6.1.11. Conseguentemente, esiste $c \in\,]x_1, x_2[$ tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0\,.$$

Quindi $f(x_1) < f(x_2)$. ◊

Teorema 6.1.16 *Siano*

- $a\,, b \in \mathbb{R}\,, \quad a < b$
- $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$
- f *continua in* $[a, b]$
- f *derivabile in* $]a, b[$
- $\forall x \in\,]a, b[\qquad f'(x) < 0\,.$

In tali ipotesi, f *è strettamente decrescente in* $[a, b]$.

Dimostrazione. Consideriamo due qualsiasi $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $x_1 < x_2$. Chiaramente, la restrizione di f a $[x_1, x_2]$ soddisfa le ipotesi del teorema 6.1.11. Conseguentemente, esiste $c \in \,]x_1, x_2[$ tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) < 0 \, .$$

Quindi $f(x_1) > f(x_2)$. ◊

6.1.3 Estremi relativi

Il teorema 6.1.9 dà una condizione necessaria affinché f *abbia un estremo relativo. Qui di seguito sono date alcune, anch'esse importanti, condizioni sufficienti.*

Teorema 6.1.17 *Siano*

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *continua in* X
- $x_0 \in X$
- I_{x_0} *un intorno di* x_0 *contenuto in* X
- f *derivabile in* $I_{x_0} - \{x_0\}$
- $\forall x \in \{x \in I_{x_0} \, : \, x < x_0\} \qquad f'(x) < 0$
- $\forall x \in \{x \in I_{x_0} \, : \, x > x_0\} \qquad f'(x) > 0.$

In tali ipotesi, x_0 *è un punto di minimo relativo proprio per* f.

Dimostrazione. Per la definizione 3.1.7 e per il teorema 3.1.8, esiste $r \in]0, +\infty[$ tale che $[x_0 - r, x_0 + r] \subseteq I_{x_0}$. Per il teorema 6.1.16, f è strettamente decrescente in $[x_0 - r, x_0]$ e strettamente crescente in $[x_0, x_0 + r]$. Quindi, esiste un intorno $N_{x_0} =]x_0 - r, x_0 + r[$ di x_0 tale che

$$\forall x \in N_{x_0} \cap -\{x_0\} \qquad f(x) > f(x_0)\ . \ \diamond$$

Definizione 6.1.12 Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è *strettamente crescente nel punto* $x_0 \in X$ se esiste un intorno N_{x_0} di x_0 tale che $\forall x \in N_{x_0} \cap X$

$$(6.1.53) \qquad \begin{cases} (x < x_0) \Rightarrow \big(f(x) < f(x_0)\big) \\ (x > x_0) \Rightarrow \big(f(x) > f(x_0)\big). \ \diamond \end{cases}$$

Definizione 6.1.13 Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è *strettamente decrescente nel punto* $x_0 \in X$ se esiste un intorno N_{x_0} di x_0 tale che $\forall x \in N_{x_0} \cap X$

$$(6.1.54) \qquad \begin{cases} (x < x_0) \Rightarrow \big(f(x) < f(x_0)\big) \\ (x > x_0) \Rightarrow \big(f(x) > f(x_0)\big). \ \diamond \end{cases}$$

Teorema 6.1.18 *Siano*

- $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $x_0 \in X$
- f *derivabile in* x_0
- $f'(x_0) > 0$.

In tali ipotesi, f *è strettamente crescente nel punto* x_0 .

Dimostrazione. Per ipotesi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 .$$

Quindi, per il teorema 5.1.11

(6.1.55) $\exists\, N_{x_0} \;:\; \forall x \in N_{x_0} \cap X - \{x_0\}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 .$$

Pertanto la (6.1.53) è vera. ◊

Teorema 6.1.19 *Siano*

- $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $x_0 \in X$
- f *derivabile in* x_0
- $f'(x_0) < 0$.

In tali ipotesi, f *è strettamente decrescente nel punto* x_0 .

Dimostrazione. La dimostrazione è perfettamente analoga a quella del teorema 6.1.18. ◊

Teorema 6.1.20 *Siano*

- $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *continua*
- $x_0 \in X$
- N_{x_0} *un intorno di* x_0 *tale che* $N_{x_0} \subseteq X$
- f *derivabile due volte in* N_{x_0}
- $f'(x_0) = 0$
- $f''(x) > 0 \qquad \forall x \in N_{x_0}$.

In tali ipotesi, x_0 *è un punto di minimo relativo proprio per* f.

Dimostrazione. Evidentemente f' è strettamente crescente in N_{x_0} . Quindi

$$\forall x \in \{x \in N_{x_0} \ : \ x < x_0\} \qquad f'(x) < f'(x_0) = 0$$
$$\forall x \in \{x \in N_{x_0} \ : \ x > x_0\} \qquad f'(x) > f'(x_0) = 0$$

e da ciò, in virtù del teorema 6.1.17, segue la tesi. ◊

Teorema 6.1.21 *Siano*

- $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f *continua*
- $x_0 \in X$
- N_{x_0} *un intorno di* x_0 *tale che* $N_{x_0} \subseteq X$
- f *derivabile due volte in* N_{x_0}
- $f'(x_0) = 0$
- $f''(x) < 0 \qquad \forall x \in N_{x_0}$.