Capitolo 4

Derivate e applicazioni

4.1. Alcuni problemi collegati alla definizione di derivata.

Il concetto di *derivata* di una funzione è uno dei più importanti in Analisi matematica, grazie alle numerose applicazioni nei campi più svariati della matematica stessa e di tutte le scienze applicate. È opportuno quindi analizzare alcuni problemi, apparentemente di natura diversa, che conducono in modo "naturale" alla definizione di derivata.

Un primo problema, di natura geometrica, si può formulare come segue: data una curva nel piano cartesiano, che per semplicità intenderemo come il grafico di una funzione definita in un certo intervallo, e dato un punto P_0 su di essa, come si può dare una definizione soddisfacente di *retta tangente* alla curva nel punto P_0?

In Geometria analitica il problema viene risolto, nel caso delle coniche, per via algebrica, e in tal caso si può anche supporre P_0 esterno alla curva. Ad esempio, per trovare le rette passanti per il punto $P_0 = (0 ; 14)$ e tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 24 = 0$, si scrive l'equazione del fascio di rette di centro P_0, che in questo caso è $y = mx + 14$: mettendo a sistema questa equazione con quella della circonferenza, si trova $(1 + m^2)x^2 + 10(3m - 1)x + 200 = 0$. Infine, imponendo che in tale equazione si abbia $\Delta = 0$, si trovano i valori $m_1 = -1$ ed $m_2 = 7$, ai quali corrispondono le rette di equazioni rispettivamente $y = -x + 14$ e $y = 7x + 14$. Questo procedimento, che vale per qualsiasi conica, dà un solo risultato se P_0 appartiene alla curva (perché in tal caso le radici dell'equazione $\Delta = 0$ sono coincidenti), mentre dà due soluzioni distinte se P_0 è esterno alla curva [1].

Il procedimento citato non si applica alle curve algebriche di ordine maggiore di 2. Ad esempio, tracciando anche approssimativamente il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$, appare evidente che deve esistere una retta tangente alla curva nel punto $P_0\,(2 ; 8)$, ma se si tentasse di mettere a sistema l'equazione data con quella del fascio di rette di centro P_0, si otterrebbe un'equazione parametrica di terzo grado sulla quale sarebbe poi impossibile

---

[1] L'equazione del fascio di centro $(x_0 ; y_0)$ scritta nella forma $y - y_0 = m(x - x_0)$ non comprende la retta $x = x_0$. Perciò, se una delle tangenti è verticale l'equazione $\Delta = 0$ dà una sola soluzione (sebbene le tangenti siano due).

imporre la condizione di coincidenza di almeno due radici; ancor più difficile sarebbe trattare con un analogo procedimento una funzione trascendente, visto che in tal caso neanche ha senso parlare di radici "coincidenti".

C'è poi un'altra questione riguardante il concetto di retta tangente ad una curva data. Nei casi più elementari si può dire che una retta è tangente ad una curva se essa "tocca la curva senza attraversarla". Se però consideriamo ancora la cubica di equazione $y = \frac{x^3}{3}$, notiamo che ad esempio la retta ad essa tangente nel punto $P_0\left(-1\,;-\frac{1}{3}\right)$ (ammesso che se ne sia data una definizione soddisfacente) senz'altro "tocca" la curva in P_0, ma ha in comune con essa un ulteriore punto situato nel primo quadrante, come si vede nella figura 4.1.1. Inoltre, tracciando la retta tangente alla curva in un punto P situato nel terzo quadrante, si nota che essa si trova, almeno rimanendo nelle vicinanze di P, al disopra

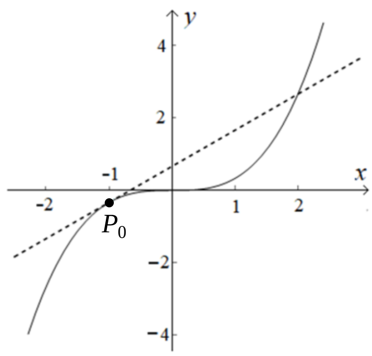

Fig. 4.1.1.

della curva, mentre se ci spostiamo nel primo quadrante, essa giace al disotto: questo ci fa pensare che esista un punto in cui la retta tangente attraversa la curva, sebbene ciò possa sembrare in contraddizione con il nome stesso di retta "tangente".

Queste considerazioni ci suggeriscono di dare una diversa definizione di retta tangente ad una curva, che comprenda anche i casi detti sopra. Perciò, tralasciando considerazioni algebriche, diamo una definizione più generale di retta tangente, dalla quale discende il concetto di derivata.

Consideriamo allora il grafico di una funzione f, limitatamente ad un intervallo aperto I, sia $a \in I$, e si tracci sulla curva il punto $P_0 = (a\,;f(a))$ (vedi figura 4.1.2).

Ora ragioniamo nel modo seguente: supponiamo di scegliere un numero reale h non nullo (indifferentemente positivo o negativo), in modo tale che $a + h$ appartenga ancora ad I (perciò h deve avere modulo positivo ma "non troppo grande"). In tal modo, si determina sulla curva un secondo punto $P = (a + h\,;\,f(a + h))$; la retta P_0P ha in comune con la curva (almeno) i punti P_0 e P, perciò è secante rispetto alla curva. Ricordiamo ora che, dati due punti $(x_1\,;y_1)$ e $(x_2\,;y_2)$ con $x_1 \neq x_2$, il coefficiente angolare della retta

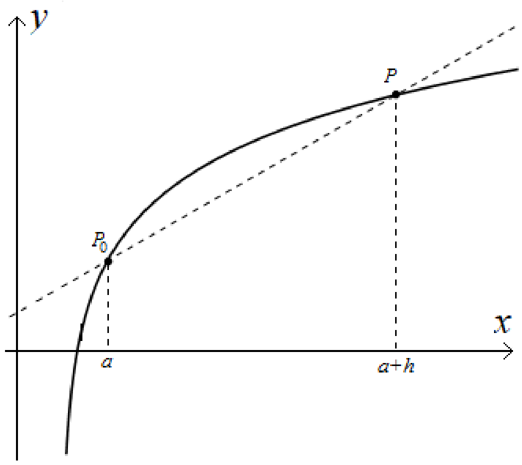

Fig. 4.1.2. Costruzione di una retta secante la curva data, tramite la scelta di un punto P sulla curva distinto da P_0.

passante per essi è $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; applicando tale formula, troviamo che la secante P_0P ha coefficiente angolare $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Supponiamo ora di "far avvicinare" P a P_0, cioè di assegnare ad h valori prossimi a 0. È evidente che per $h \to 0$ la posizione della retta P_0P si modifica, in quanto i due punti in cui essa interseca la curva sono sempre più vicini tra di loro. Definiamo quindi la retta tangente alla curva in P_0 come la "posizione limite" a cui tende la retta secante P_0P quando P tende ad avvicinarsi a P_0, come si vede nella figura 4.1.3.

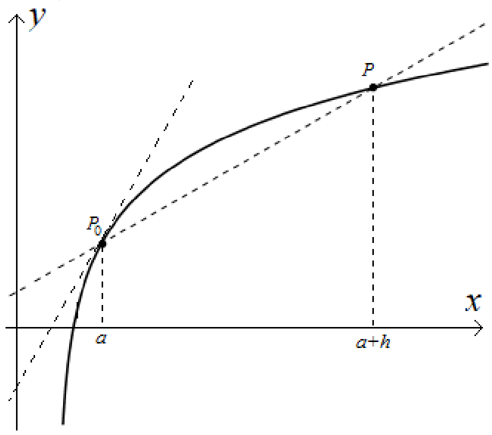

Fig. 4.1.3. Al tendere di P a P_0, la retta secante P_0P diventa la retta tangente alla curva in P_0.

Possiamo formalizzare la definizione con il concetto di limite: basta definire la retta tangente alla curva in P_0 come la retta passante per P_0 ed avente coefficiente angolare uguale al limite del rapporto $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, purché tale limite esista e sia finito.

Sia ad esempio $f(x) = x^2$, e sia $P_0 = (1\,;1)$. Visto che il dominio è tutto $\mathbb{R}$, h può assumere un qualsiasi valore non nullo. Consideriamo quindi un secondo punto P, di coordinate $(1 + h\,; f(1 + h)) = (1 + h\,; (1 + h)^2)$, e scriviamo il coefficiente angolare della retta secante P_0P:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1}{h}\,. \tag{1.1}$$

Per quanto detto sopra, il coefficiente angolare della retta tangente alla curva in P_0 è il limite della (1.1) per $h \to 0$, il cui calcolo dà luogo alla forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$; in questo caso si ha facilmente

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2\,,$$

per cui il coefficiente angolare della tangente è 2, e da ciò si ottiene l'equazione $y = 2x - 1$.

Essendo la curva una parabola, si è trovata la stessa retta che si sarebbe ottenuta con le tecniche di Geometria analitica; tuttavia, il procedimento appena visto consente di determinare la retta tangente a una curva molto più generale.

Accenniamo ora ad un importante problema di cinematica; esso consiste nel dare una definizione soddisfacente di *velocità* di un punto materiale P in moto rispetto ad un dato sistema di riferimento. Per semplificare la trattazione supponiamo che P sia vincolato a muoversi su una retta r, sulla quale è stabilito un sistema di ascisse: in tal modo, ad ogni punto di r corrisponde un numero reale, e viceversa.

Supponiamo di cominciare a contare il tempo da un istante fissato, al quale corrisponde il valore $t = 0$; ad ogni successivo istante di tempo t (cioè quando sono trascorsi t secondi dall'istante iniziale) associamo il numero che indica la posizione occupata da P, che indichiamo con $s(t)$: esso è l'ascissa del punto, che può essere un numero reale di segno qualsiasi. In questo modo abbiamo definito una funzione della variabile t, che chiamiamo *funzione di posizione*.

Si osservi che la funzione s non indica lo spazio percorso da P dall'inizio del moto all'istante t, bensì la sua posizione in tale istante. Supponiamo ad esempio che all'istante 0 il punto si trovi nell'origine del sistema di riferimento, cosicché $s(0) = 0$. Se per i primi 2 secondi P si sposta nel verso delle ascisse positive, fino ad avere una distanza uguale a 3 metri da O, e nei 4 secondi successivi si sposta di nuovo nella posizione iniziale, avremo $s(6) = 0$, ma lo spazio percorso non è nullo.

Se in intervalli di tempo uguali la variazione di posizione di P è sempre la stessa (ad esempio, se in ogni secondo P si sposta di 2 metri nel verso delle ascisse positive), la definizione di velocità è molto semplice: basterà infatti scrivere

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}\,, \tag{1.2}$$

cioè poniamo la velocità uguale al rapporto tra la differenza delle posizioni e il tempo trascorso. In questo primo caso v è indipendente dall'intervallo di tempo scelto, perciò il punto si muove di moto rettilineo uniforme.

Se però in tempi uguali la variazione di posizione non è sempre la stessa, non possiamo utilizzare la (1.2) per definire la velocità, perché il rapporto dipende dall'intervallo di tempo fissato. Perciò, consideriamo un particolare t_0, e cerchiamo di definire la velocità *nell'istante* t_0.

Prendiamo allora un altro istante di tempo, che indichiamo con t_1, oppure con $t_0 + h$, dove h è scelto positivo o negativo, sempre in modo che sia definita la posizione all'istante $t_0 + h$. Ora, la frazione $\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$ esprime il rapporto tra la differenza delle posizioni all'inizio e alla fine dell'intervallo di tempo considerato e la lunghezza dell'intervallo stesso, perciò indica la velocità del punto tra gli istanti di tempo t_0 e $t_0 + h$; diremo allora che questa è la *velocità media* di P nell'intervallo considerato. Si osservi che, per le ipotesi fatte, questo numero può essere positivo, negativo o nullo.

Calcoliamo ora il limite della velocità media definita sopra per $h \to 0$: intuitivamente, è come se si considerasse la velocità media per intervalli di tempo sempre più piccoli. Se questo limite esiste finito, indichiamo tale numero con il termine *velocità istantanea*: precisamente, diciamo che la velocità del punto all'istante t_0 è uguale al limite per $h \to 0$ della velocità media $\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$. Si osservi che anche la velocità istantanea può essere indifferentemente positiva, negativa o nulla (in particolare, è possibile che *in un singolo istante* la velocità sia nulla senza che il punto sia in stato di quiete in tutto un intervallo di tempo).

I due problemi considerati sono formalmente simili: infatti, la definizione di velocità istantanea come limite di un certo rapporto è identica alla definizione di coefficiente angolare della retta tangente ad una curva. Possiamo rendere evidente questa analogia tracciando il *diagramma orario* del moto, cioè un grafico che riporti in ascissa i tempi e in ordinata le posizioni via via occupate dal punto (vedi figura 4.1.4). La curva non rappresenta la *traiettoria* del punto (che si muove su una retta), bensì è l'insieme di tutti i punti $(t\,; s(t))$. Nel caso riportato in figura, il punto P in moto sulla retta r parte da una posizione negativa, per un certo intervallo di tempo si sposta nel verso positivo, successivamente arretra (ma la posizione minima raggiunta è positiva), poi torna a spostarsi nel verso positivo. Il coefficiente angolare della retta u, che unisce i punti

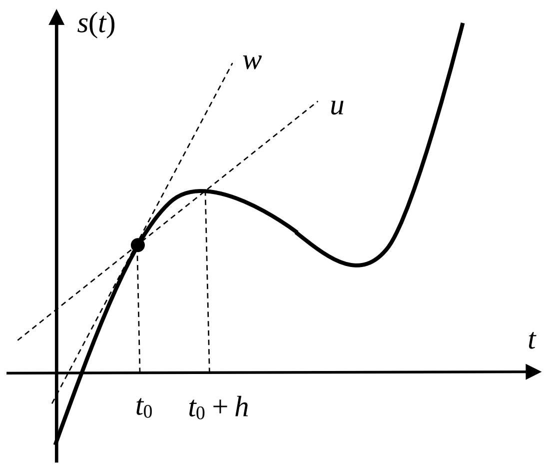

Fig. 4.1.4. Diagramma orario di un moto rettilineo. Il coefficiente angolare della retta secante u è uguale alla velocità media tra gli istanti t_0 e $t_0 + h$, mentre la retta tangente w nel punto di ascissa t_0 ha coefficiente angolare uguale alla velocità all'istante t_0.

$(t_0\,; s(t_0))$ e $(t_0 + h\,; s(t_0 + h))$ coincide con la velocità media in $[t_0\,, t_0 + h]$, mentre il coefficiente angolare di w (tangente al diagramma nel punto di ascissa t_0), è la velocità del punto all'istante t_0.

4.2. Definizione di derivata di una funzione in un punto.

Come si è visto nel paragrafo 4.1, alcuni problemi, apparentemente di natura diversa, portano a soluzioni molto simili; questo ci suggerisce la definizione di *derivata* di una funzione. Per il momento definiamo la derivata in un particolare punto[2] del dominio di f, successivamente vedremo come il concetto si generalizza. Cominciamo col definire il *rapporto incrementale*, dal quale seguirà immediatamente la definizione di derivata.

DEFINIZIONE DI RAPPORTO INCREMENTALE DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO. Sia f una funzione definita in un intorno I del punto a, e sia h un numero non nullo, scelto in modo che anche $a + h$ appartenga ad I. Si definisce ***rapporto incrementale*** di f nel punto a (con incremento h) l'espressione

[2] Nel paragrafo precedente abbiamo evitato di parlare di "punto" scelto in un intervallo, per evitare la confusione con il punto appartenente al piano cartesiano. Qui torniamo alla solita consuetudine di utilizzare indifferentemente i termini "numero reale" e "punto".

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{2.1}$$

L'ipotesi che I sia un intorno di a assicura che ci si può spostare sia a destra sia a sinistra: infatti la (2.1) ha senso per $h \neq 0$. Poiché f si suppone nota e il punto a è fissato, il rapporto incrementale si può intendere come una funzione della variabile h, definita al variare di h in un opportuno intorno bucato di 0. Confrontando la (2.1) con quanto detto nel paragrafo 4.1, è chiaro il significato grafico del rapporto incrementale: esso rappresenta il coefficiente angolare della retta secante la curva nei punti di ascisse a ed $a + h$; esso inoltre ha anche il significato di velocità media di un punto in moto su una traiettoria rettilinea, calcolata tra i due istanti di tempo a ed $a + h$.

DEFINIZIONE DI DERIVATA DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO a FISSATO. Data la funzione f definita in un intorno di a, si costruisca il rapporto incrementale (2.1) con un generico incremento h. Se per $h \to 0$ il rapporto incrementale tende ad un limite finito, f viene detta ***derivabile*** in a, e il limite ottenuto viene chiamato ***derivata*** della funzione f nel punto a, ed indicato con il simbolo $f'(a)$. Si ha quindi

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \tag{2.2}$$

sempre che tale limite esista e sia finito.

Per quanto detto sopra, la derivata di f in a ha come interpretazione geometrica il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(a\,;\ f(a))$; allo stesso modo, $s'(t_0)$ rappresenta la velocità all'istante t_0, se $s = s(t)$ è la legge del moto.

Si osservi che per definire il rapporto incrementale (e di conseguenza la derivata) abbiamo solo supposto f definita in un intorno di a. Vedremo tra poco che conseguenza della derivabilità di una funzione f in un punto a è la sua continuità in a; questa condizione però non è richiesta nella definizione, bensì si ricava *a posteriori*.

Vediamo di seguito alcuni esempi di calcolo diretto della derivata utilizzando la definizione. Posto $f(x) = \frac{12}{x}$ e $a = 3$, il rapporto incrementale è $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{\frac{12}{3+h}-4}{h}$, dove h è scelto in $(-3\,,0) \cup (0\,,+\infty)$. Pertanto, si ha:

$$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{12}{3+h}-4\right) = \lim_{h\to 0}\frac{-4h}{h(3+h)} = -\frac{4}{3},$$

e da ciò deduciamo l'equazione della retta tangente $y = -\frac{4}{3}x + 8$ (il lettore può facilmente verificare che si ottiene lo stesso risultato con il metodo del fascio di rette, visto che il grafico della funzione è una conica).

Calcoliamo ora la derivata di $f(x) = \log(1 + x)$ nel punto $a = 0$. In questo caso il rapporto incrementale è $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\log(1+h)}{h}$, dove $-1 < h < 0$ oppure $h > 0$. Si ha quindi $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$, grazie alla (7.4) del capitolo 3. Perciò l'equazione della tangente alla curva nel punto $(0\,;\,0)$ è $y = x$.

È possibile però che il rapporto incrementale non tenda ad alcun limite per $h \to 0$, oppure che esso tenda all'infinito. Vediamo a tale proposito due semplici esempi. Sia $f(x) = |x|$, e sia $a = 0$; allora il rapporto incrementale (che ha senso per qualsiasi $h \neq 0$) è uguale a $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$. Essendo tale espressione uguale ad 1 per $h > 0$ e a -1 per $h < 0$, concludiamo che il limite del rapporto incrementale non esiste, pertanto la funzione non è derivabile in 0 (di conseguenza, neanche è possibile definire una retta tangente al grafico della funzione nell'origine). Si consideri poi $f(x) = \sqrt[3]{x}$, e sia ancora $a = 0$. Il rapporto incrementale (anche qui definito per ogni $h \neq 0$) è uguale a $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = h^{-\frac{2}{3}}$. In questo caso il limite per $h \to 0$ è $+\infty$, perciò la funzione non è derivabile in $a = 0$. Da un punto di vista grafico, osserviamo che, a differenza di quanto accade per la funzione $|x|$, qui la retta tangente esiste, e coincide con l'asse delle ordinate. In casi simili, pur esistendo la tangente, non è possibile definire la derivata; d'altra parte, non esiste il coefficiente angolare di una retta verticale [3].

Concludiamo con alcune osservazioni sulla definizione di derivata. In tutti i casi precedenti, calcolando la derivata di una data funzione in un punto a fissato, abbiamo trovato un numero, nei casi in cui il limite del rapporto incrementale esiste finito. Ora però consideriamo la derivata di una funzione non in un punto fissato, ma in un punto generico del suo dominio. Ad esempio, posto $f(x) = \sqrt[3]{x}$, vediamo in quali punti esiste la derivata, e qual è la sua espressione.

A tale scopo, costruiamo il rapporto incrementale della funzione in un generico x del suo dominio, per poi calcolarne il limite. Il rapporto incrementale si scrive nella forma $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$; si osservi che questa espressione va intesa come funzione di h e non di x, essendo x fissato. Dunque il rapporto incrementale è uguale a $\frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}$, che ha senso per qualsiasi h non nullo. Il calcolo del limite per $h \to 0$ dà:

---

[3] Per questo motivo, alcuni autori di Analisi matematica considerano anche il caso della derivata infinita; si tratta però di una scelta che comporta altre difficoltà.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}.$$

Poiché il numeratore è *h*, si ha $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; abbiamo così conferma del fatto che la derivata non esiste per $x = 0$, mentre essa è $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ per ogni *x* non nullo.

Perciò, se si calcola la derivata di una funzione avente dominio *D* in un suo punto *a*, si ottiene un numero (sempre che *f* sia derivabile in *a*); se invece si calcola f' in un *x* generico del dominio, allora la derivata $f'(x)$ è essa stessa una funzione di *x*, avente un dominio $E \subseteq D$.

4.3. Continuità delle funzioni derivabili.

Come detto prima, per dare la definizione di derivata è richiesto che la funzione *f* sia definita in un intorno di *a*, ma non si fa alcuna ipotesi sulla continuità. Ora dimostriamo un semplice teorema che mette in relazione i due concetti.

Premettiamo un'osservazione che ci tornerà utile anche in altre dimostrazioni. Riprendiamo la definizione (2.1) di rapporto incrementale, e scriviamola in un modo leggermente diverso. Poiché *h* è un generico numero non nullo tale che $a + h \in I$, poniamo $a + h = x$, da cui $h = x - a$. Allora, il rapporto incrementale si scrive come segue:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \tag{3.1}$$

dove naturalmente *x* va scelto nell'intorno *I* (può essere indifferentemente $x > a$ oppure $x < a$. È evidente che la (3.1) sarà utilizzata per scrivere il rapporto incrementale in un punto *a* fissato e non in un *x* qualsiasi; segue immediatamente la formula

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \tag{3.2}$$

sempre con la condizione che tale limite esista finito.

TEOREMA 4.1 (continuità delle funzioni derivabili). *Sia f definita in I intorno di a, e sia f derivabile in a. Allora f è continua in a.*

Dimostrazione. Consideriamo l'espressione $f(x) - f(a)$, con x distinto da a ed appartenente ad I. Moltiplicando e dividendo per $(x - a)$, si trova:

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a).$$

Per $x \to a$ il primo fattore tende per ipotesi al limite finito $f'(a)$, mentre il secondo è una funzione lineare che ha limite 0. Ne segue $\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = 0$, che è proprio la definizione di continuità di f nel punto a. (4) □

Questo teorema stabilisce dunque che la derivabilità è una condizione più forte della continuità: se f è derivabile in a, essa è ivi continua, mentre non è vero il contrario, come si è visto negli esempi al termine del paragrafo 4.2.

4.4. Regole di derivazione e derivate di alcune funzioni elementari.

Per alcune funzioni elementari la derivata può essere calcolata direttamente, anche per un x generico; per funzioni più complicate si ricorre invece ad opportune regole, che consentono di ricondurre il calcolo della derivata a questi casi di base.

Cominciamo quindi col dimostrare alcune semplici regole algebriche per la derivata. Nel seguito supponiamo di ragionare per un generico punto x, che va inteso fissato.

TEOREMA 4.2 (regole elementari di derivazione). *Siano f e g definite in un intorno I di un fissato punto x, e siano derivabili in x. Allora:*

(*i*) *per qualsiasi costante reale α, la derivata in x della funzione αf è uguale ad $\alpha f'(x)$;*
(*ii*) *la derivata in x della funzione $f + g$ è $f'(x) + g'(x)$, e una regola simile vale per la differenza;*
(*iii*) *la derivata in x della funzione fg è $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;*
(*iv*) *nell'ipotesi aggiuntiva $g(x) \neq 0$, la derivata in x della funzione $\frac{f}{g}$ è $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.*

[4] Il teorema 4.1 è conseguenza del fatto che definiamo $f'(a)$ solo nel caso in cui il rapporto incrementale tende ad un limite finito. Se si considerasse anche il caso della derivata infinita, esso sarebbe falso, perché il calcolo del limite darebbe la forma indeterminata $\infty \cdot 0$.

Dimostrazione. La (i) si dimostra scrivendo esplicitamente il rapporto incrementale di αf nel punto x, con incremento h; esso è uguale a $\frac{\alpha f(x+h)-\alpha f(x)}{h} =$ $= \alpha \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Essendo per ipotesi f derivabile in x, per $h \to 0$ questa espressione tende al limite $\alpha f'(x)$.

Anche la (ii) si ottiene in modo diretto. Infatti, il rapporto incrementale della funzione somma è uguale a $\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}$, che si può scrivere $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$; al tendere di h a 0, si ha il limite $f'(x) + g'(x)$. È evidente che lo stesso ragionamento vale per la differenza $f-g$.

Come conseguenza dei punti (i) e (ii), possiamo dire che, se f e g sono derivabili in uno stesso punto x, qualsiasi loro combinazione lineare $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ è derivabile in x, ed è $h'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$.

La parte (iii) del teorema è più complessa, perché il rapporto incrementale del prodotto di due funzioni non coincide con il prodotto dei due rapporti incrementali. Scriviamo allora

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \\
&= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \\
&= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}. \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Al tendere di h a 0, il primo addendo della (4.1) tende a $f'(x)g(x)$, in quanto per ipotesi f è derivabile in x, mentre $g(x + h)$ tende a $g(x)$, essendo g continua in x grazie al teorema 4.1; inoltre, il secondo addendo tende a $f(x)g'(x)$, e con questo la formula per la derivazione del prodotto è dimostrata.

Infine, per dimostrare la (iv), consideriamo dapprima la funzione $\frac{1}{g(x)}$, dove supponiamo g derivabile e non nulla in x. Si osservi che, essendo g continua in x, il teorema della permanenza del segno implica che g mantiene lo stesso segno in un intorno J di x, perciò $\frac{1}{g(x)}$ esiste in J.

Scriviamo allora il rapporto incrementale di $\frac{1}{g(x)}$, considerando un h non nullo e tale che anche $x + h$ appartenga a J:

$$\frac{\dfrac{1}{g(x+h)}-\dfrac{1}{g(x)}}{h}=\frac{\dfrac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h}=-\frac{g(x+h)-g(x)}{h\,g(x+h)g(x)}.$$

Per $h \to 0$ questo rapporto tende a $-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$: in tal modo abbiamo dimostrato la formula di derivazione per la funzione reciproca.

Infine, per ottenere la (*iv*), basta scrivere $\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$ ed applicare le formule precedenti. Abbiamo allora:

$$f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.\ \square$$

Introduciamo ora un importante simbolo, che sarà utilizzato spesso nel seguito. Abbiamo osservato nel paragrafo 4.2 che la derivata di una funzione è un numero (se calcolata in un fissato a del dominio) oppure una funzione (se calcolata in un generico x del dominio). In quest'ultimo caso, la derivata si può intendere come una "regola" che ad una funzione ne fa corrispondere un'altra. Una simile "legge" è un concetto analogo a quello di funzione tra due insiemi A e B, che però agisce tra insiemi di funzioni. Tale legge è chiamata *operatore*: dato un certo insieme di funzioni, un operatore L associa univocamente ad una funzione di tale insieme un'altra, che può anche appartenere ad un altro insieme. Ad esempio, se A è l'insieme delle funzioni continue in $\mathbb{R}$, e se $L(f)$ associa ad ogni $f \in A$ la funzione $|f|$, anche il codominio dell'operatore L coincide con l'insieme delle funzioni continue in $\mathbb{R}$.

Se ad ogni funzione $f(x)$ derivabile in un certo insieme I associamo la sua derivata, abbiamo un'altra funzione $f'(x)$ (che in generale non è a sua volta derivabile, perciò l'insieme di arrivo sarà semplicemente l'insieme delle funzioni definite in I); indicato allora con "D" l'operatore che associa ad f la sua derivata f', esso viene detto ***operatore di derivazione***.

Vediamo ora il calcolo delle derivate di alcune importanti funzioni elementari, cominciando con il caso di una funzione costante. Se $f(x) = c$ per ogni x in $\mathbb{R}$, oppure $f(x) = c$ in un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$, il rapporto incrementale nel generico punto x è $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{c-c}{h}=0$, per ogni $h \neq 0$. Per $h \to 0$ il limite di tale rapporto è ovviamente 0, perciò la derivata di una funzione costante è 0 per ogni x del suo dominio; utilizzando l'operatore di derivazione definito sopra, possiamo scrivere

$$\mathrm{D}c = 0. \tag{4.2}$$

Un altro caso molto semplice è quello della funzione $f(x) = x$, avente dominio $\mathbb{R}$: il rapporto incrementale in x è $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)-x}{h}$, che vale 1 per ogni $h \neq 0$. Ne segue per ogni $x \in \mathbb{R}$ la formula

$$\mathrm{D}x = 1. \tag{4.3}$$

Per inciso, notiamo che nella dimostrazione del teorema 4.2 la (*i*) si sarebbe potuta anche ottenere come caso particolare della (*iii*). Infatti, $\alpha f(x)$ è il prodotto tra la funzione costante α e la funzione $f(x)$. In ogni caso, l'applicazione della (*i*) ha come conseguenza il fatto che la derivata di una qualsiasi funzione lineare $f(x) = mx$ è uguale ad m per ogni x; più in generale, applicando la regola della derivata di una somma e la (4.2), si ha

$$\mathrm{D}(mx + q) = m. \tag{4.4}$$

La (4.4) concorda con il ben noto significato geometrico della derivata: se il grafico della funzione è una retta, in ciascun punto la tangente coincide con la retta stessa, ed il suo coefficiente angolare è m (lo stesso vale per una costante, essendo nullo il coefficiente angolare di una retta orizzontale).

Consideriamo ora una funzione del tipo x^n, dove per il momento n è un naturale fissato. Il rapporto incrementale è $\dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$; ora, per manipolare questa espressione, eseguiamo la scomposizione di $A^n - B^n$, ottenendo

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{(x+h-x)\left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\right)}{h} =$$
$$= (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1},$$

dove l'ultima somma è costituita di n addendi. Passando al limite per $h \to 0$, si trova

$$\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}, \tag{4.5}$$

che comprende i casi particolari già visti (infatti per $n = 1$ si trova $1 \cdot x^0 = 1$, e per $n = 0$ si ha identicamente 0). Ma la (4.5) consente di calcolare $\mathrm{D}x^n$ per qualsiasi n naturale; perciò, si trova ad esempio

$$\mathrm{D}x^2 = 2x; \qquad \mathrm{D}x^3 = 3x^2; \qquad \mathrm{D}x^4 = 4x^3.$$

Calcoliamo ora la derivata della funzione $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, dove n è un numero naturale, e dove si deve supporre $x \neq 0$. Possiamo a tale scopo utilizzare la regola della derivata della funzione reciproca, ricavata nel corso della dimostrazione del teorema 4.2. Poiché si può scrivere $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, dove $g(x) = x^n$, applicando anche la (4.5), si ha:

$$\mathrm{D}\frac{1}{x^n} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}\,. \tag{4.6}$$

Il risultato si può anche scrivere nella forma $-nx^{-n-1}$; perciò, la (4.5) vale per qualsiasi n intero.

Vediamo come essa si può estendere al caso degli esponenti razionali con numeratore ± 1. Sia $f(x) = \sqrt[n]{x}$ (con $n \in \mathbb{N}$), dove supponiamo x reale se n è dispari, x non negativo se n è pari. In questo caso il rapporto incrementale è $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$ $= \dfrac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h}$ Grazie alla formula per la scomposizione di $A^n - B^n$, esso si scrive

$$\frac{\left(\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}\right)\left(\sqrt[n]{(x+h)^{n-1}} + \sqrt[n]{(x+h)^{n-2}x} + \cdots + \sqrt[n]{(x+h)x^{n-2}} + \sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}{h\left(\sqrt[n]{(x+h)^{n-1}} + \sqrt[n]{(x+h)^{n-2}x} + \cdots + \sqrt[n]{(x+h)x^{n-2}} + \sqrt[n]{x^{n-1}}\right)} =$$

$$= \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt[n]{(x+h)^{n-1}} + \sqrt[n]{(x+h)^{n-2}x} + \cdots + \sqrt[n]{(x+h)x^{n-2}} + \sqrt[n]{x^{n-1}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[n]{(x+h)^{n-1}} + \sqrt[n]{(x+h)^{n-2}x} + \cdots + \sqrt[n]{(x+h)x^{n-2}} + \sqrt[n]{x^{n-1}}}\,,$$

dove il denominatore contiene n addendi. Al tendere di h a 0, ciascuno di essi tende a $\sqrt[n]{x^{n-1}}$, perciò si ha il risultato

$$\mathrm{D}\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,, \tag{4.7}$$

valido per $x \neq 0$ se n è dispari, per $x > 0$ se n è pari. Il secondo membro della (4.7) si può anche scrivere come $\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$, che coincide formalmente con la (4.5) nel caso di un esponente $\frac{1}{n}$. Consideriamo poi $f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}$, con $n \in \mathbb{N}$; grazie alla regola per la derivazione della funzione reciproca, abbiamo:

$$\mathrm{D}\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = -\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}{\sqrt[n]{x^2}} = -\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}\,, \tag{4.8}$$

anch'essa valida per $x \neq 0$ se n è dispari e per $x > 0$ se n è pari. Osserviamo però che il secondo membro della (4.8) si può anche scrivere come $-\frac{1}{n}x^{-\frac{1}{n}-1}$, perciò la (4.5) vale anche per gli esponenti $-\frac{1}{n}$.

Per quanto detto, è inutile memorizzare le formule (4.7) e (4.8); dovendo calcolare ad esempio la derivata di $\sqrt[7]{x}$, basta scrivere la funzione come $x^{\frac{1}{7}}$, da cui $\mathrm{D}x^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}} = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$, per ogni $x \neq 0$. In modo analogo, la derivata di $\frac{1}{\sqrt[10]{x}} = x^{-\frac{1}{10}}$ è uguale a $-\frac{1}{10}x^{-\frac{1}{10}-1} = -\frac{1}{10\sqrt[10]{x^{11}}} = -\frac{1}{10x\sqrt[10]{x}}$, per $x > 0$.

Conviene però ricordare il caso particolare $n = 2$, che si usa spesso: si ha infatti

$$\mathrm{D}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,. \tag{4.9}$$

Riassumiamo gli insiemi di continuità e di derivabilità per le funzioni $\sqrt[n]{x}$ e $\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$.

n pari:

- la funzione $\sqrt[n]{x}$ è continua in $[0, +\infty)$ e derivabile in $(0, +\infty)$;
- la funzione $\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ è continua e derivabile in $(0, +\infty)$;

n dispari:

- la funzione $\sqrt[n]{x}$ è continua in $\mathbb{R}$ e derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
- la funzione $\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ è continua e derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.