

Capitolo 1

Meccanica del continuo

1.1 Introduzione. Il problema che ora prendiamo in esame è quello della costruzione di un modello matematico che simuli il comportamento di un fluido, che può essere un *gas* oppure un *liquido*. In questa analisi la *Termodinamica* affianca la *Meccanica* con un ruolo maggiore di quello usualmente espletato nel caso dei solidi. Evidenziamo subito che, anche in presenza di effetti termici, l'analisi dei principali problemi di interesse ingegneristico può essere condotta simulando il corpo con un mezzo continuo. In rigore invece, come è ben noto nella *Struttura della materia*, il volume occupato dagli atomi presenti in un corpo è solo una piccolissima parte del volume del corpo. Ad esempio, in un pezzo di acciaio allo stato solido, il rapporto è dell'ordine di 10^{-14} .

Può accadere che nel problema in analisi si verifichino fenomeni di dissipazione dell'energia meccanica non trascurabili. In tal caso per costruire un adeguato modello matematico del problema occorre far ricorso alla *Termodinamica dei processi irreversibili*.

1.2 Richiami di Termodinamica classica. Chiamiamo *sistema* una porzione di spazio occupata da materia, *ambiente* il resto dell'universo.

Denotiamo con $V(t)$ la porzione dello spazio a tre dimensioni occupata dal sistema all'istante $t \in]t_i, t_f[$ e con $\Sigma(t)$ la sua frontiera (cioè la superficie del sistema). Il simbolo t_i [risp. t_f] denota l'istante iniziale [risp. finale] dell'intervallo di tempo nel quale interessa analizzare il fenomeno.

Formuliamo una teoria della *Termodinamica classica* per via postulativa. Postuliamo anzitutto

[1.1] *Un sistema può scambiare col suo ambiente massa ed energia.* ■

Nella [1.1] la massa deve intendersi nelle sue diverse forme (cioè nei suoi diversi stati di aggregazione) e l'energia nelle sue diverse forme (potenziale, cinetica, elettromagnetica, ecc.). Il postulato [1.1] afferma che tutto ciò che il sistema scambia con l'ambiente è associato a uno scambio di massa e/o ad uno scambio di energia. Ad esempio lo scambio di quantità di moto meccanica è associato a uno scambio di massa; lo scambio di quantità di moto elettromagnetica è associato a uno scambio di energia.

Chiaramente questo primo postulato della *Termodinamica* è valido solo al di fuori del campo relativistico. Infatti in campo relativistico non è possibile scambiare indipendentemente massa ed energia.

Beninteso ammettere questo primo postulato della termodinamica implica che il sistema può scambiare con l'ambiente o energia ma non massa oppure massa ed energia. Infatti la massa scambiata porta con sé (anche in campo non relativistico) la sua energia.

Una grandezza si dice *estensiva* [risp. *intensiva*] quando il suo valore (numerico) dipende [risp. non dipende] dall'estensione del sistema.

Evidentemente se G è una grandezza estensiva, detta g la grandezza specifica (anche detta *densità* di G), risulta

$$G = \int_V g \, dV .$$

Chiamiamo *flusso puntuale* (o *flusso locale*) all'istante $t \in]t_i, t_f[$ di una grandezza estensiva G attraverso una superficie $\Lambda(t)$ in punto $P(t)$ (di $\Lambda(t)$), e denotiamo col simbolo φ_G , la quantità di G che attraversa nell'unità di tempo un'unità di area di $\Lambda(t)$ cui appartenga $P(t)$. La superficie $\Lambda(t)$ è supposta regolare, sicché ogni suo punto ammette piano tangente (e normale n). Evidentemente

$$\varphi_G = g \, \mathbf{v} \times \mathbf{n} .$$

Chiamiamo *flusso* (o *flusso globale*) all'istante $t \in]t_i, t_f[$ di una grandezza estensiva G attraverso una superficie Λ , e denotiamo col simbolo $\Phi_G(t)$, il numero (reale)

$$\Phi_G(t) = \int_{\Lambda(t)} \varphi_G \, d\sigma = \int_{\Lambda(t)} g \, \mathbf{v} \times \mathbf{n} \, d\sigma .$$

Chiamiamo *produzione puntuale* (o *produzione locale*) all'istante $t \in]t_i, t_f[$ di una grandezza estensiva G in un volume $V(t)$ in un punto $P(t)$ (di $V(t)$), e denotiamo col simbolo δ_G , la quantità di G che viene creata (o distrutta) nell'unità di tempo in un'unità di volume (di $V(t)$) cui appartenga $P(t)$.

Chiamiamo *produzione* (o *produzione globale*) all'istante $t \in]t_i, t_f[$ di una grandezza estensiva G in un volume $V(t)$, e denotiamo col simbolo $\Delta_G(t)$, il numero (reale)

$$\Delta_G(t) = \int_{V(t)} \delta_G dV .$$

Un sistema si dice in *equilibrio termodinamico* se in ogni suo punto (interno o di frontiera) tutti i flussi locali e tutte le produzioni locali sono nulle.

Formuliamo ora il secondo postulato (che viene usualmente chiamato *primo principio della Termodinamica*).

[1.2] *Esistono una grandezza estensiva U (che chiamiamo energia interna) ed una grandezza estensiva S (che chiamiamo entropia) ciascuna delle quali è funzione (in condizioni di equilibrio termodinamico) di un numero finito di grandezze estensive del sistema, che chiamiamo variabili di stato. ■*

Il postulato [1.2] ci consente di assumere S [risp. U] come variabili di stato. Pertanto, dette X_1, \dots, X_m ($m \in \mathbb{N}$) le altre variabili di stato da cui dipende U [risp. S], risulta

$$U = U(S, X_1, \dots, X_m)$$

$$[\text{risp. } S = S(U, X_1, \dots, X_m)] .$$

Si dice anche che il sistema ha gli $m + 1$ gradi di libertà S, X_1, \dots, X_m

[risp. U, X_1, \dots, X_m].

Postuliamo ora

[1.3] *Le funzioni U ed S sono continue, omogenee di primo grado e risulta*

$$\frac{\partial U}{\partial S} > 0, \quad \frac{\partial S}{\partial U} > 0.$$

Inoltre in condizioni di equilibrio termodinamico, detta T la temperatura assoluta ^{1.1} del sistema, risulta

$$(1.1) \quad \frac{\partial U}{\partial S} = T, \quad \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}. \quad \blacksquare$$

Rileviamo esplicitamente che per il postulato [1.3] si ha, $\forall \lambda \in \mathfrak{R}$

$$\begin{aligned} U(\lambda S, \lambda X_1, \dots, \lambda X_m) &= \lambda U(S, X_1, \dots, X_m) \\ S(\lambda U, \lambda X_1, \dots, \lambda X_m) &= \lambda S(U, X_1, \dots, X_m). \end{aligned}$$

Formuliamo ora il quarto postulato (che viene usualmente chiamato *secondo principio della Termodinamica*)

[1.4] *L'energia interna U può essere prodotta o distrutta. L'entropia S*

^{1.1} Anche detta termodinamica. La scala delle temperature assolute fu fissata da *Lord Kelvin*, che assegnò all'acqua e al ghiaccio in condizioni di equilibrio termodinamico (alla pressione di 1 atm) $T=273,16^\circ K$.

può essere prodotta ma non distrutta^{1.2}. ■

Postuliamo ora (*terzo principio della Termodinamica* o principio di *Nernst*) :

[1.5] *Quando T tende a zero S tende a zero.* ■

Denotiamo ora con E l'energia totale del sistema (in tutte le sue forme) e postuliamo che (*principio di conservazione dell'energia*)

[1.6] *Se un sistema è in equilibrio termodinamico risulta $\Delta_E = 0$.* ■

Chiamiamo *trasformazione* del sistema una qualsiasi evoluzione del sistema che lo porta da uno stato di equilibrio termodinamico ad un altro stato di equilibrio termodinamico. Se lo stato finale coincide con quello iniziale, la trasformazione si chiama chiusa o meglio *ciclo*. Se l'evoluzione del sistema non porta ad uno stato di equilibrio termodinamico o non parte da uno stato di equilibrio termodinamico si preferisce parlare di *processo* anziché di trasformazione.

Una trasformazione si dice *reversibile* se è possibile riportare il sistema e l'ambiente nelle condizioni iniziali.

In genere un ciclo riporta il sistema nelle condizioni iniziali ma non

^{1.2} Il secondo principio della *Termodinamica* ammette anche altre formulazioni equivalenti. Si noti che non è possibile attribuire significato fisico all'entropia. Tuttavia la sua importanza è tale che è necessario abituarci a considerarla come un attributo del sistema, proprio come la massa o il volume.

l'ambiente. Pertanto esso è reversibile se è costituito da due trasformazioni reversibili.

Se durante una trasformazione si ha produzione di entropia, questa non può essere annullata e ne consegue che la trasformazione considerata è irreversibile.

Una trasformazione (o un processo) si dice *adiabatico* se (detto Q il flusso di energia sotto forma di calore) risulta $Q=0$.

Una trasformazione (o un processo) si dice *isentropico* se

$$\frac{dS}{dt} = 0 .$$

Consideriamo un sistema in equilibrio termodinamico. Sappiamo che esso è completamente caratterizzato da $m \in N$ variabili di stato (nel senso che se si conosce il valore di questi m parametri è possibile determinare il valore di qualsiasi grandezza termodinamica del sistema). Pertanto il comportamento termodinamico del sistema è completamente caratterizzato se si conoscono m equazioni indipendenti nei parametri di stato: la relazione fondamentale ed $m-1$ equazioni di stato indipendenti.

Per un gas costituito da un'unica fase chimica e da un'unica fase fisica in condizioni di equilibrio termodinamico i parametri di stato sono la massa M , il volume V , l'entropia S (sicché $m=3$).

Sappiamo che esiste la funzione di stato energia interna U , sicché

$$U = U(S, V, M)$$

sicché

$$dU = \frac{\partial U}{\partial S} dS + \frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial M} dM .$$

Abbiamo postulato che

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T ;$$

inoltre poiché $\frac{\partial U}{\partial V} dV$ è un'energia,

$$\frac{\partial U}{\partial V}$$

deve essere una *pressione* e la denotiamo col simbolo p . Analogamente, $\frac{\partial U}{\partial M}$ è un'energia per unità di massa e la chiamiamo *potenziale elettrochimico* μ .

Perciò per il sistema in esame la relazione fondamentale è (*Eulero*)

$$(1.2) \quad dU = T dS + p dV + \mu dM .$$

(e se il sistema non scambia massa il terzo addendo a secondo membro è zero). Se aggiungiamo alla relazione fondamentale due equazioni di stato

$$p = p(S, V, M)$$

$$\mu = \mu(S, V, M)$$

individuamo completamente il comportamento termodinamico del sistema.

Di norma la relazione fondamentale si ottiene ipotizzando un modello (cioè congetturandone una espressione) e poi andando a verificare quale sia il suo campo di validità.

Se un gas è ad r componenti (con r intero positivo), in perfetta analogia si ottiene l'equazione fondamentale (di *Eulero*)

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV - \sum_{i=1}^r \frac{\mu_i}{T} dM_i$$

cui vanno aggiunte $r + 1$ equazioni di stato (essendo $m = r + 2$).

Le equazioni di stato esprimono i parametri estensivi in funzione dei parametri intensivi. Una equazione di stato di un sistema composto da m grammi di un gas di peso molecolare M può essere approssimata dalla legge^{1.3}, posto $N = m/M$,

$$(1.3) \quad pV = N R_0 T .$$

Chiamasi *gas perfetto* o gas ideale una sostanza che obbedisce esattamente

^{1.3} Nella formula (1.2.3) R_0 denota una costante universale per tutti i gas, pari a $R_0 = 8316,6 \text{ N} \cdot \text{m}/^\circ\text{K} = 1,986 \text{ Cal}/^\circ\text{K}$. Si usa anche porre $R = R_0 / M$ nella (1.2.3). La (1.2.3) compendia le leggi di *Boyle* ($pV = \text{cost}$), di *Gay-Lussac* ($V = V_0 \left(1 + \frac{T}{273,14}\right)$, $p = p_0 \left(1 + \frac{T}{273,14}\right)$) e di *Avogadro* (volumi uguali di gas qualsivoglia, in condizioni uguali di temperatura e pressione, contengono lo stesso numero di molecole).

alla (1.3). Tutti i gas reali hanno un comportamento che è simulato dalla (1.3) solo in via approssimata.

La seconda equazione di stato di un gas perfetto è

$$(1.4) \quad U = c_V T$$

dove la costante c_V (che dicesi *calore specifico a volume costante*) è pari ^{1.4} a $\frac{3}{2} R$ per un gas monoatomico, a $\frac{5}{2} R$ per un gas biatomico.

Ancora, per un gas perfetto si ottiene facilmente che, detto c_p il *calore specifico a pressione costante*, risulta (Mayer)

$$c_p - c_V = R .$$

OSSERVAZIONE 1.1 Rileviamo che una trasformazione adiabatica di un gas perfetto ha equazione $p V^\gamma = \text{cost}$ (essendo $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$). Infatti vedremo che una adiabatica è isoentropica. Pertanto dalle (1.2), (1.4) segue

$$c_V dT = p dV$$

e di qui e dalla (1.3) si trae

$$\frac{dT}{T} + \frac{c_p - c_V}{c_V} \frac{dV}{V} = 0$$

da cui

^{1.4} Questo risultato si ricava in modo semplice impiegando la teoria *cinetica*.

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0$$

da cui la tesi. ■

OSSERVAZIONE 1.2 Dicesi *calore specifico* c di una sostanza tra le due temperature (assolute) T_1 e T_2 il quoziente

$$c = \frac{q}{T_2 - T_1}$$

dove q è la quantità di calore necessaria per portare l'unità di massa della sostanza da T_1 a T_2 . Così per un corpo che pesa P Kg la quantità di calore necessaria a scaldarlo da T_1 a T_2 è $Q = cP(T_2 - T_1)$.

Si noti che la definizione esatta di c è

$$c = \lim_{T_2 \rightarrow T_1} \frac{q}{T_2 - T_1} = \frac{dq}{dT} \cdot \blacksquare$$

Nel caso di gas hanno importanza il *calore specifico a pressione costante* c_p e il *calore specifico a volume costante* c_v .

PROBLEMA 1.1 Un fluido (avente $\gamma=2,4$) evolve secondo la trasformazione $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ di fig. 1.1, dove la trasformazione $C \rightarrow D$ è adiabatica. Determinare il lavoro fatto e il calore scambiato.

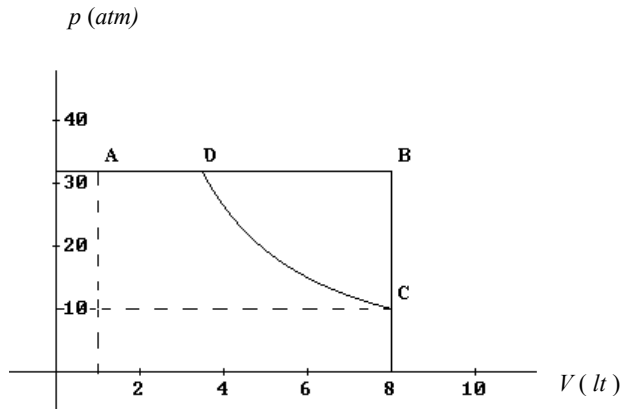


fig. 1.1

Soluzione. La trasformazione $C \rightarrow D$ ha equazione $pV^K = cost$ (con $K = \gamma - 1 = 1,4$). Quanto al lavoro, si ha (poiché in $B \rightarrow C$ il volume è costante)

$$\begin{aligned}
 L &= L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} = \int_A^B p \, dV + \int_B^C p \, dV + \int_C^D p \, dV \\
 &= p \int_A^B dV + 0 + \int_C^D p_D V_D^K V^{-K} \, dV = p(V_B - V_A) + p_D V_D^K \int_C^D V^{-K} \, dV \\
 &= 32 \cdot 7 \, atm \cdot lt + p_D V_D^K \left[\frac{V^{-K+1}}{-K+1} \right]_C^D \\
 &= 224 \, atm \cdot lt + \frac{p_D V_D^K}{1-K} (V_D^{1-K} - V_C^{1-K}) \\
 &= 224 + \frac{p_D V_D^K V_D^{1-K} - p_C V_C^K V_C^{1-K}}{1-K} = 224 + \frac{p_D V_D - p_C V_C}{1-K} \, atm \cdot lt
 \end{aligned}$$

e di qui (osservando che dalla $p_C V_C^{1,4} = p_D V_D^{1,4}$ segue $V_D = 2,7 \, lt$) si trae

$$L = \frac{32 \cdot 2,7^{1,4} - 10 \cdot 8^{1,4}}{-0,4} = 224 - 176 = 48 \text{ atm} \cdot \text{lt} .$$

Quanto al flusso di calore osserviamo preliminarmente che per un gas reale^{1.5}

$$c_p = AR \frac{\gamma}{\gamma-1} , \quad c_V = AR \frac{1}{\gamma-1} .$$

Nel caso dell'aria, risultando

$$A = \frac{1}{427} \frac{\text{cal}}{\text{Kgm}} , \quad R = 29,27 \frac{\text{Kg m}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} ,$$

si ha pertanto

$$c_p = 0,239 \frac{\text{cal}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} , \quad c_V = 0,171 \frac{\text{cal}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} .$$

Inoltre, usando l'equazione di stato (1.3), si ottiene

$$T_A = 11 \text{ }^\circ\text{C} , \quad T_B = 87,5 \text{ }^\circ\text{C} , \quad T_C = 27,5 \text{ }^\circ\text{C} .$$

Con ciò

$$\begin{aligned} Q &= Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} = Q_{AB} + Q_{BC} + 0 = c_p(T_B - T_A) + c_V(T_C - T_B) \\ &= 18,3 \frac{\text{cal}}{\text{Kg}} - 10,3 \frac{\text{cal}}{\text{Kg}} = 8 \frac{\text{cal}}{\text{Kg}} . \blacksquare \end{aligned}$$

PROBLEMA 1.2 *Due sistemi sono isolati dall'ambiente esterno (da pareti*

^{1.5} Per un gas perfetto $A=1$.

impermeabili, anergotiche e adiabatiche) e sono separati tra loro da una parete impermeabile, anergotica, diabatica. Il sistema 1 è costituito da due moli di He (che è monoatomico), il sistema 2 da tre moli di O₂. L'energia totale del sistema è di 6000 Kcal. Calcolare U₁ e U₂ all'equilibrio.

Soluzione. All'equilibrio $T_1 = T_2$. Poiché

$$U_1 = \frac{3}{2} N_1 R_0 T_1 = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 1,98 \cdot T_1 \text{ Kcal}$$

$$U_2 = \frac{3}{2} N_2 R_0 T_2 = \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot 1,98 \cdot T_2 \text{ Kcal}$$

si deve avere all'equilibrio

$$U_1 + U_2 = 6000 \text{ Kcal}$$

$$\frac{U_1}{3 \cdot 1,98} = \frac{U_2}{7,5 \cdot 1,98}$$

sicché

$$U_1 = 1720 \text{ Kcal} \quad , \quad U_2 = 4280 \text{ Kcal} \quad . \quad \blacksquare$$

1.3 Le equazioni del bilancio. Consideriamo una grandezza G del sistema (ad esempio la massa o l'energia), funzione della variabile temporale $t \in]t_i, t_f[$ ^{1.6}. Denotiamo con g la quantità di G contenuta nell'unità di volume del sistema. Pertanto g è funzione delle variabili spaziali x, y, z e

^{1.6} $t_i \in [0, +\infty[$ è l'istante iniziale; t_f è l'istante finale (cioè un numero reale $> t_i$) oppure il simbolo $+\infty$.

della variabile temporale t e risulta

$$\forall t \in]t_i, t_f[\quad G(t) = \int_{V(t)} g(x, y, z, t) \, dx \, dy \, dz .$$

Evidentemente G può variare nell'intervallo di tempo $]t, t + dt[$ solo se ne introduciamo altra dall'esterno oppure se ne viene creata o distrutta all'interno del sistema stesso. Quindi la variazione di G nell'intervallo di tempo $]t, t + dt[$ è uguale al flusso di G (attraverso $\Sigma(t)$) nell'intervallo di tempo $]t, t + dt[$ più la produzione (che se è negativa è una distruzione) di G in $V(t)$ nell'intervallo di tempo $]t, t + dt[$. Pertanto in $]t_i, t_f[$

$$(1.5) \quad \frac{dG}{dt} = \Phi_G + \Delta_G$$

La (1.5) viene chiamata *equazione del bilancio* (di G).

L'equazione del bilancio è valida anche per grandezze termodinamiche. Però quando la si applica a grandezze termodinamiche occorre supporre che il sistema è in equilibrio termodinamico.

Una grandezza G tale che $\Delta_G = 0$ si dice *conservativa*.

Se nella (1.5) G è una grandezza conservativa la (1.5) viene anche chiamata *equazione della conservazione* o *principio di conservazione*.

Evidentemente in un sistema isolato ^{1.7(1.2.7)} ogni grandezza conservativa è costante.

Applichiamo l'equazione del bilancio all'energia totale E del sistema, che per il postulato [1.6] è una grandezza conservativa. Si ha

$$(1.6) \quad \frac{dE}{dt} = \Phi_E .$$

Abbiamo postulato che il sistema può scambiare con l'ambiente o energia ma non massa oppure energia e massa. Scindiamo quindi Φ_E nella somma di Φ_{EE} (flusso di energia che non è associato a scambio di massa) e di Φ_{EM} (flusso di energia associato a scambio di massa).

Conviene (e sarà chiaro nel seguito perché) considerare il flusso di energia Φ_{EE} somma di una aliquota Q (che chiamiamo *flusso di calore* per unità di tempo o *potenza termica* o semplicemente *calore*) e di una aliquota L (che chiamiamo *flusso di lavoro* per unità di tempo o *potenza meccanica* o semplicemente *lavoro* (per unità di tempo)).

Pertanto, se Σ non consente scambio di massa tra sistema e ambiente, risulta

$$(1.7) \quad \frac{dE}{dt} = Q + L .$$

Nella (1.7) (che è una delle forme del *principio di conservazione*

^{1.7} Un sistema si dice isolato se $\forall t \in]t_i, t_f[$ il flusso attraverso la frontiera $\Sigma(t)$ (del volume $V(t)$ occupato dal sistema all'istante t) di una qualsiasi grandezza è nullo.

dell'energia) è opportuno evidenziare che Q ed L sono due forme di flussi di energia, cioè sono tutti e due energie in transito.

La variazione di E in un intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ si ottiene integrando i due membri della (1.7) rispetto al tempo (da t_1 a t_2).

Eseguiamo ora il bilancio di una grandezza che non si conserva.

Una grandezza tipica della termodinamica che non si conserva è l'*entropia*. Anche l'energia interna U non si conserva. Però dell'entropia sappiamo qualcosa in più: non solo non si conserva ma non può neanche essere distrutta.

Osserviamo subito che siccome la grandezza di cui vogliamo eseguire il bilancio è una grandezza termodinamica, per poterla definire occorre che il sistema sia in equilibrio termodinamico.

Dalla (1.5) si trae ^{1.8} che in $]t_i, t_f[$

$$(1.8) \quad \frac{dS}{dt} - \Phi_S = \Delta_S .$$

Poiché per il postulato [1.4] $\Delta_S \geq 0$, la (1.8) fornisce

$$(1.9) \quad \frac{dS}{dt} - \Phi_S \geq 0 .$$

Abbiamo postulato che il sistema può scambiare con l'ambiente o energia

^{1.8} In questa impostazione semplificata vi è una incongruenza, perché in condizioni di equilibrio termodinamico i flussi e le produzioni sono nulle. Però nell'impostazione esatta, che dà preliminarmente tutti i concetti della *Termodinamica di equilibrio*, questa incongruenza non sussiste.

ma non massa oppure massa ed energia. Pertanto, così come per l'energia totale, scindiamo Φ_S nella somma di un flusso di entropia Φ_{SM} associato allo scambio di massa e di un flusso di entropia Φ_{SQ} associato allo scambio di energia ma non allo scambio di massa. Naturalmente se Σ non consente scambio di massa allora risulta $\Phi_{SM}=0$.

Diamo ora una definizione fondamentale della *Termodinamica* che definisce a posteriori il *calore* ed il *lavoro*. Φ_{SQ} è associato al flusso di energia sotto forma di calore. Pertanto quella particolare forma di flusso di energia che abbiamo chiamato lavoro non porta associato con sé un flusso di entropia.

In conclusione l'entropia può fluire (attraverso Σ) insieme alla massa o insieme all'energia o insieme ad entrambe, ma da sola non può fluire (attraverso Σ). Quindi se il sistema è isolato risulta $\Phi_S=0$.

Denotiamo con φ_{SQ} il flusso locale di entropia (attraverso Σ) non associato a flusso di massa, sicché

$$\Phi_{SQ} = \int_{\Sigma} \varphi_{SQ} d\sigma .$$

Si dimostra in rigore che, detta T la temperatura assoluta (o termodinamica) del sistema, risulta

$$T \varphi_{SQ} = q .$$

In particolare, se T è costante su Σ , si ha

$$\Phi_{sQ} = \frac{Q}{T} .$$

1.3 Termodinamica dei processi irreversibili. *La Termodinamica* dei processi reversibili (che è anche detta *Termodinamica classica*) correla uno stato di equilibrio termodinamico con un altro stato di equilibrio termodinamico, comunque raggiunto. Essa afferma che se l'energia è variata ciò è dovuto a flussi di calore e lavoro; che se l'entropia è variata ciò è dovuto a flussi o produzioni di entropia. Ma non dà informazioni su ciò che succede durante la trasformazione se questa non attraversa istante per istante stati di equilibrio termodinamico (che sono stati in cui flussi e produzioni sono identicamente nulli).

Per dare significato ai flussi ed alle produzioni, e ricavarne espressioni ingegneristicamente operative, costruiamo un nuovo edificio (che includa quello precedente della *Termodinamica classica*), ancora su base postulativa. Formuliamo anzitutto un nuovo postulato che ci permette di definire l'energia interna, l'entropia e le altre grandezze termodinamiche anche in stati del sistema che non sono di equilibrio termodinamico.

[1.2.7] *In qualsiasi punto P di un sistema, detto I un intorno di P convenientemente piccolo, il sottosistema individuato da I è in stato di equilibrio termodinamico. ■*

Il limite principale di questo postulato è che esso implica che la storia del sistema, cioè i processi subiti in precedenza, non influenzano lo stato del sistema. Infatti esso dice che l'energia interna in un punto dipende solo dai

valori che hanno in quel punto i parametri termodinamici. In natura esiste invece una vasta fenomenologia a cui questo postulato non può applicarsi. Ad esempio nei processi di isteresi e nei trattamenti termici le proprietà del materiale dipendono dalla storia precedente.

Il postulato [1.2.7] consente di definire le grandezze della *Termodinamica classica* anche in stati che non sono di equilibrio termodinamico. Occorrono ora strumenti che ci consentano di valutare i flussi e le produzioni di tali grandezze. Postuliamo perciò ora (principio di *Curie*)

[1.8] *Se il sistema è isotropo ogni flusso dipende da tutte e sole le forze generalizzate dallo stesso ordine tensoriale^{1.9} del flusso. ■*

Premesso che nel seguito ci occuperemo sempre di sistemi isotropi, e che chiamiamo *forza generalizzata*^{1.10} qualsiasi causa che possa provocare flussi, il postulato [1.8] ci dice che un flusso che è uno scalare [risp. vettore] [risp. tensore] dipende da tutte le forze generalizzate che sono degli scalari [risp. vettori] [risp. tensori] e solo da quelle.

Ad esempio nella combustione la affinità chimica è una forza generalizzata di tipo scalare. Essa è quella che spinge la reazione in un senso o nell'altro. Però essendo uno scalare non può influenzare (se il mezzo è isotropo) né i

^{1.9} Una grandezza (associata a un punto) si dice *scalare* (o *tensore* di ordine zero) se è individuata da un numero reale; *vettoriale* (o *tensore* di ordine 1) se è individuata da una terna ordinata di numeri reali; *tensoriale* (o *tensore* di ordine 2, o semplicemente *tensore*) se è individuata da una sestupla ordinata di numeri reali (ovvero da due vettori). Giova evidenziare che ad un vettore è associata una direzione; ad un tensore sono associate due direzioni (o, se si preferisce, un piano e una direzione).

^{1.10} Ciò perché il flusso di lavoro è provocato da una causa che chiamiamo forza.

flussi di energia né il flusso di massa (che sono grandezze vettoriali).

Di norma una forza generalizzata provoca direttamente un flusso ed indirettamente altri flussi. Ad esempio la forza generalizzata $\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{T}$ è la causa diretta del flusso di energia sotto forma di calore ed è una causa indiretta del flusso di massa.

Resta da chiarire qual è la dipendenza funzionale dei flussi dalle cause. Ricordiamo che (in opportune ipotesi) una funzione reale di una variabile reale è sviluppabile in serie di *Mc Laurin*

$$(1.10) \quad f(c) = f(0) + f'(0) c + f''(0) \frac{c^2}{2} + \dots .$$

Esprimiamo per l'effetto (cioè per il flusso) tale dipendenza funzionale dalla causa (cioè dalla forza generalizzata). Scegliamo la causa in modo che quando la causa è nulla l'effetto è nullo. Pertanto $f(0) = 0$. Limitiamo lo studio alla termodinamica lineare dei processi irreversibili (sicché nella (1.10) trascuriamo i termini di ordine maggiore di 1).

Siamo giunti alla conclusione che l'effetto è proporzionale alla causa e, cosa importantissima, il coefficiente (di proporzionalità) è indipendente dalla causa. Pertanto $f'(0)$ è una grandezza puramente termodinamica, cioè è una funzione di stato. Ad esempio nella legge di *Fourier* della trasmissione del calore

$$(1.11) \quad Q = k \frac{\partial T}{\partial r}$$

la costante k è una funzione di stato del mezzo (beninteso questa legge è

valida solo se c'è la possibilità di flussi di massa).

Così in un sistema isotropo i flussi dipendono da tutte le forze generalizzate dello stesso ordine tensoriale (dirette e indirette). Se la fenomenologia è lineare allora i flussi sono proporzionali a tutte le cause che possono provarli. Inoltre i coefficienti di proporzionalità sono delle funzioni di stato cioè dipendono solo dallo stato del sistema.

Consideriamo un sistema costituito dalla miscela di due gas. C'è flusso di energia sotto forma di calore Q e flusso di massa Φ_{M_1} del primo gas. Le relative forze generalizzate dirette sono $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{T} \right)$ e $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu}{T} \right)$. In base al principio di *Curie* poiché queste forze generalizzate dirette sono dei vettori ed entrambi i flussi sono dei vettori, ciascun flusso deve dipendere da entrambe le forze generalizzate. Allora nel campo della termodinamica lineare scriveremo

$$Q = L_{qq} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{T} \right) + L_{qm} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu}{T} \right)$$

$$Q = L_{mq} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{T} \right) + L_{mm} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu}{T} \right) .$$

I coefficienti di proporzionalità diretti L_{qq} , L_{mm} e quelli incrociati L_{qm} , L_{mq} sono funzioni soltanto dello stato del sistema.

Sussiste il seguente teorema di *Onsager* (che ha validità generale, anche per sistemi ad n gradi di libertà).

[1.9] *In assenza di campi magnetici i coefficienti incrociati sono uguali:*

$$L_{qm} = L_{mq} \cdot \blacksquare$$

Queste conclusioni sono della massima importanza pratica. Ad esempio è grazie ad esse che è possibile costruire frigoriferi basati sull'effetto termoelettrico. In essi lo scambio di energia sotto forma di calore è ottenuto mediante una differenza di potenziale elettrico.

Si dimostra che

$$(1.12) \quad \delta_S = \sum_{i=1}^n \Phi_i \cdot F_i \cdot$$

Nella (1.12) δ_S è la produzione locale di entropia; Φ_1, \dots, Φ_n sono tutti i flussi in gioco; F_1, \dots, F_n sono tutte le forze generalizzate in gioco. Nella (1.12) i prodotti sono scalari se flussi e forze sono vettori; doppi prodotti scalari se flussi e forze sono tensori. Osserviamo che nella (1.12) il flusso di energia sotto forma di lavoro non compare perché ad esso non si accompagna produzione di entropia.

Abbiamo postulato che $\delta_S \geq 0$. Ciò si traduce in condizioni sui coefficienti diretti e incrociati L_{ij} .

Ad esempio nel caso già esaminato in cui essi sono L_{qq} , L_{mm} , L_{qm} , L_{mq} risulta:

$$L_{qq} \geq 0$$

$$L_{mm} \geq 0$$

$$L_{qq} L_{mm} - L_{mq}^2 \geq 0 \cdot$$

Capitolo 2

Meccanica dei fluidi

2.1 Le equazioni della fluidodinamica. Iniziamo lo studio della *Dinamica dei fluidi* con le seguenti premesse. Siano \mathbf{u} e \mathbf{v} due vettori di \mathfrak{R}^3 di componenti (u_x, u_y, u_z) , (v_x, v_y, v_z) . Si chiama *prodotto tensoriale* di \mathbf{u} per \mathbf{v} e si denota col simbolo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ il *tensore* di \mathfrak{R}^3

$$\begin{bmatrix} u_x v_x & u_x v_y & u_x v_z \\ u_y v_x & u_y v_y & u_y v_z \\ u_z v_x & u_z v_y & u_z v_z \end{bmatrix}.$$

Consideriamo un *tensore* $\boldsymbol{\tau}$ di \mathfrak{R}^3

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

ed un *vettore* \mathbf{n} di \mathfrak{R}^3

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}.$$

Chiamiamo *prodotto scalare* di $\boldsymbol{\tau}$ per \mathbf{n} e denotiamo col simbolo $\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$ il vettore di \mathcal{R}^3

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xx}n_x & \tau_{xy}n_y & \tau_{xz}n_z \\ \tau_{yx}n_x & \tau_{yy}n_y & \tau_{yz}n_z \\ \tau_{zx}n_x & \tau_{zy}n_y & \tau_{zz}n_z \end{bmatrix}.$$

Detti $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ i versori degli assi coordinati (sicché $\mathbf{p} = p_x\mathbf{x} + p_y\mathbf{y} + p_z\mathbf{z}$), chiamiamo *flusso del tensore $\boldsymbol{\tau}$ attraverso Σ* il vettore

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n} \, d\sigma &= \int_{\Sigma} p \, d\sigma = \\ &= \left(\int_{\Sigma} p_x \, dx \right) \mathbf{x} + \left(\int_{\Sigma} p_y \, dy \right) \mathbf{y} + \left(\int_{\Sigma} p_z \, dz \right) \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Tanto premesso, evidenziamo che qualsiasi problema di fluidodinamica ha incognite di due tipi: le incognite di stato (che caratterizzano lo stato termodinamico del sistema) e l'incognita cinetica (che è il vettore velocità). Ovviamente queste incognite sono funzioni del punto e del tempo.

Va da sé che è necessario formulare tante equazioni scalari quante sono le incognite termodinamiche di stato più una equazione vettoriale in cui interviene il vettore velocità. Per formulare tali equazioni imponiamo il fatto che l'evoluzione del sistema avviene soddisfacendo le equazioni della conservazione o del bilancio.

Se il sistema è costituito da una sola fase, imponiamo la conservazione della massa. Se invece è una miscela di masse diverse, imponiamo anche il

bilancio delle singole masse (o la conservazione delle singole masse, se si esclude la possibilità di reazione chimiche). Un'altra equazione scalare è quella della conservazione della energia totale. Un'equazione vettoriale (che si scompone in tante equazioni scalari quante sono le componenti del vettore) è il bilancio della quantità di moto. La produzione della quantità di moto è dovuta alle forze di massa (quale ad esempio la forza di gravità). In assenza di tali forze si imporrà la conservazione della quantità di moto.

Esplicitiamo dunque il bilancio della massa totale M . Detta ρ la densità di massa, \mathbf{v} la velocità ed \mathbf{n} il versore di una retta n , si ha

$$G = M, \quad g = \rho, \quad \varphi_M = \rho \mathbf{v} \times \mathbf{n}, \quad \delta_M = 0.$$

Essendo nulla la produzione locale δ_M , il bilancio diventa una conservazione e si scrive

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{\Sigma} \rho \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = 0.$$

Ragionando allo stesso modo, applicando il bilancio della massa ad un parallelepipedo elementare (con facce parallele ai piani coordinati) e tenendo conto del teorema della divergenza si ottiene l'equazione differenziale in $V \times [t_i, +\infty[$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Esplicitiamo il bilancio della quantità di moto. La densità della quantità di moto è $g = \rho \mathbf{v}$. Dal teorema della media pesata (della *Teoria*

dell'integrazione) e dalla definizione di baricentro segue facilmente che la quantità di moto totale è $G = M\mathbf{v}_0$ (dove \mathbf{v}_0 è la velocità del baricentro del sistema).

Il flusso della quantità di moto è il flusso di un tensore. Infatti, come il flusso di una grandezza scalare G è il flusso di un vettore $g\mathbf{v}$, così il flusso di una grandezza vettoriale (quale è la quantità di moto) è il flusso di un tensore.

Scindiamo il flusso della quantità di moto $\Phi_{\rho\mathbf{v}}$ in una aliquota ^{2.1}

$$\int_{\Sigma} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{n} \, d\sigma$$

che chiamiamo *flusso convettivo* della quantità di moto e in una aliquota che chiamiamo *flusso diffusivo* della quantità di moto. Tale flusso diffusivo di quantità di moto è anch'esso il flusso di un tensore, che denotiamo con il simbolo $\boldsymbol{\tau}$:

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n} \, d\sigma$$

Il tensore $\boldsymbol{\tau}$ ha le dimensioni di una forza per unità di area ed in effetti è proprio il tensore degli sforzi. Precisamente, sul piano macroscopico il risultato delle agitazioni molecolari nei riguardi del trasporto della quantità di moto si manifesta con un sistema di sforzi superficiali.

Se non vi è produzione di momento di quantità di moto, facendo il bilancio del momento della quantità di moto si ottiene la simmetria delle τ .

^{2.1} Si veda quanto richiamato in premessa.

Infine, la produzione della quantità di moto è dovuta alle forze di massa (anche dette di volume) specifiche \mathbf{f} ma non a quelle superficiali (anche dette di contatto):

$$\Delta_{\rho \mathbf{v}} = \int_V \mathbf{f} dV .$$

In definitiva, l'equazione del bilancio della quantità di moto si scrive

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \int_{\Sigma} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{n} d\sigma = \int_V \mathbf{f} dV .$$

Esplicitiamo la conservazione dell'energia totale. Un sistema ha molte forme di energia. A conservarsi è l'energia totale del sistema. Un primo contributo all'energia totale è l'energia interna U del sistema. Un secondo contributo è l'energia cinetica

$$\int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV .$$

In assenza di campi gravitazionali ed elettromagnetici la somma di questi due contributi costituisce l'energia totale del sistema. E' importante evidenziare che (poiché l'energia cinetica si può convertire in energia interna e viceversa) ciascuno di questi due contributi può non conservarsi. La difficoltà della formulazione della equazione della conservazione dell'energia totale sta appunto nel riconoscere quali sono i contributi significativi che intervengono in un dato fenomeno. Ad esempio in una reazione nucleare occorre portare in conto la variazione di energia

conseguente alla variazione di massa.

Consideriamo un sistema in cui l'energia totale è somma di quella interna e di quella cinetica:

$$G = U + \frac{1}{2}Mv^2.$$

La densità di G è

$$g = u + \frac{1}{2}\rho v^2 ,$$

essendo u l'energia interna per unità di massa.

Il flusso convettivo dell'energia totale è

$$g\mathbf{v} = \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} .$$

Denotiamo con J_t il flusso diffusivo dell'energia totale. Esso è somma di tre addendi: il flusso diffusivo di energia associato con gli eventuali flussi di massa, il flusso diffusivo di energia sotto forma di calore e il flusso diffusivo di energia sotto forma di lavoro.

Il flusso diffusivo di energia sotto forma di lavoro è il prodotto scalare del tensore sforzo superficiale per il vettore velocità con cui si muove il punto di applicazione dello sforzo superficiale.

Il flusso diffusivo di energia sotto forma di calore è quello che in precedenza abbiamo denotato col simbolo Q .

Il flusso diffusivo di energia associato con il flusso di massa è dato dal

flusso di massa moltiplicato per l'energia per unità di massa relativa al potenziale chimico della sostanza.

Il flusso diffusivo di energia sotto forma di lavoro $\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{v}$ lo possiamo scindere in una parte reversibile (a cui non si associa produzione di entropia) ed in una parte irreversibile.

Il flusso diffusivo di energia sotto forma di calore è sempre irreversibile (cioè ad esso si accompagna sempre una produzione di entropia).

E' chiaro che per scindere il flusso diffusivo di lavoro $\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{v}$ in una parte reversibile e in un parte irreversibile è necessario scindere il tensore degli sforzi ^{2.2}

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

in una parte reversibile e in una parte irreversibile. Intendiamo per sforzo reversibile [risp. irreversibile] quella parte di sforzo che dà luogo a lavoro reversibile [risp. irreversibile].

Per riconoscere la parte reversibile di $\boldsymbol{\tau}$ ci rifacciamo alla *Termodinamica* classica, che per definizione è la termodinamica dei fenomeni reversibili. In essa lo sforzo preso in considerazione è la pressione (di equilibrio).

Pertanto decomponiamo il tensore degli sforzi $\boldsymbol{\tau}$ nella somma di un tensore idrostatico \boldsymbol{p} e di una aliquota rimanente $\boldsymbol{\tau}_d$. Con ciò

$$\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\tau}_d \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\tau}_d \times \boldsymbol{v} .$$

^{2.2} Come è noto, la componente τ_{xx} [risp. τ_{yy}] [risp. τ_{zz}] di $\boldsymbol{\tau}$ può denotarsi anche col simbolo σ_x [risp. σ_y] [risp. σ_z].

Restano da aggiungere soltanto le *equazioni costitutive*, che esprimono il comportamento (meccanico) del mezzo.

Per caratterizzare lo stato di un fluido basta assegnare il volume. Per caratterizzare lo stato di un solido bisogna assegnare non il volume, ma il suo stato deformazione. Così nei fluidi si dà l'equazione di stato per esprimere la dipendenza di p dai parametri che rappresentano il sistema. Nei solidi si danno relazioni (ad esempio quelle di *Navier*) che esprimono la dipendenza del tensore degli sforzi dal tensore della deformazione.

In ogni caso data l'espressione di $\boldsymbol{\tau}_d$ il sistema di equazioni che risolve ogni problema del continuo (sia fluido che solido) risulterà chiuso, avendo tante equazioni quante sono le incognite.

In definitiva in assenza di flussi diffusivi di massa e in assenza di energia potenziale derivante dalle forze di massa l'equazione della conservazione dell'energia totale si scrive

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV + \\ + \int_{\Sigma} \left[\left(u + \frac{v^2}{2} \right) \rho \mathbf{v} + \mathbf{p} \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau}_d \times \mathbf{v} + \mathbf{Q} \right] \times \mathbf{n} d\sigma = 0 .$$

Ogni termine dell'equazione dell'energia ha le dimensioni di una potenza, cioè di una energia per unità di tempo.

In ogni problema fluidodinamico (o di *Meccanica dei solidi*), sarà compito dell'*Ingegnere* semplificare il problema scartando quei termini che riterrà

opportuno. La scelta dei termini da scartare potrà essere effettuata con la teoria dei numeri caratteristici, cui si dà qui un cenno. Come vedremo questi numeri danno una misura relativa delle grandezze che intervengono nel problema, sicché consentono di individuare i termini delle equazioni che si possono trascurare (nell'ambito dell'approssimazione con cui il problema viene trattato).

2.2 I numeri caratteristici. Adimensionalizziamo le equazioni del continuo. Scegliamo le unità di misura, una densità di riferimento ρ_r (sicché $\rho = \rho^* \rho_r$, dove ρ^* è un numero puro) e una velocità di riferimento v_r (sicché $v = v^* v_r$, dove v^* è un numero adimensionale).

La v_r va scelta in relazione al fenomeno che si studia. Ad esempio se si studiano dei fenomeni relativistici la v_r sarà la velocità della luce perché in quei fenomeni a noi interessa in che rapporto sta la velocità del sistema con quella della luce.

Il compito dell'ingegnere sta proprio nella scelta opportuna della grandezza di riferimento, cioè nel cogliere il significato fisico del fenomeno che si considera.

Per esempio se si studia il fenomeno della propagazione del suono sarebbe errato scegliere come velocità di riferimento quella della luce perché tutti i numeri risulterebbero estremamente piccoli e quindi trascurabili e il fenomeno non si potrebbe studiare. E' chiaro che in questo secondo problema la velocità di riferimento è quella del suono a , che è una grandezza termodinamica. Nell'aria e in condizioni standard (di temperatura e di pressione), risulta $a = 340 \frac{m}{s}$. Così per il tempo: nello studio di un

fenomeno in cui intervengono oscillazioni sinusoidali, sceglieremo come tempo di riferimento t_r il periodo, e scriveremo $t = t^* t_r$, con t^* numero privo di dimensioni.

Inoltre, se studiamo la trasmissione del calore in un cilindro, la superficie di riferimento è quella laterale (proporzionale al diametro). Se invece studiamo il flusso di massa attraverso il cilindro, la superficie di riferimento è la base (proporzionale al quadrato del diametro).

Adimensionalizziamo l'equazione della continuità. Risulta

$$\frac{\rho_r V_r}{t_r} \frac{\partial}{\partial t^*} \int_{V^*} \rho^* dV^* + \rho_r V_r \Sigma_r \int_{\Sigma^*} \mathbf{v}^* \times \mathbf{n} d\sigma = 0$$

e di qui

$$(2.4) \quad \frac{\partial}{\partial t^*} \int_{V^*} \rho^* dV^* + \left(\frac{v_r \Sigma_r t_r}{V_r} \right) \int_{\Sigma^*} \rho^* \mathbf{v}^* \times \mathbf{n} d\sigma = 0 .$$

Nella (2.4) il primo addendo è un numero adimensionale e così pure sono adimensionali i due fattori che costituiscono il secondo addendo. Il primo di tali fattori si chiama numero di *Strouhal* e si indica con il simbolo S_{tr}

$$S_{tr} = \frac{v_r \Sigma_r t_r}{V_r} .$$

Esso misura l'importanza relativa del contributo del flusso rispetto al contributo della instazionarietà nella equazione della conservazione della massa. Se esso è molto piccolo rispetto all'unità, il contributo del flusso è

trascurabile rispetto al contributo dell'instazionarietà ; viceversa se è molto grande sarà trascurabile il termine instazionario rispetto al termine relativo al flusso. Se S_{tr} ha ordine di grandezza 1 il termine instazionario e quello relativo al flusso sono dello stesso ordine di grandezza per cui vanno portati in conto entrambi.

Tutti i numeri caratteristici (essendo adimensionali) sono sempre interpretabili come rapporto di due grandezze aventi le stesse dimensioni. Così è possibile dare a questi numeri varie interpretazioni.

L'interpretazione più immediata del numero di *Strouhal*, siccome stiamo studiando l'importanza della convezione rispetto all'instazionarietà, è quella del rapporto tra due tempi. Chiameremo tempo macroscopico di riferimento (o tempo convettivo) il termine $\frac{V_r}{v_r \Sigma_r}$ (che ha proprio le dimensioni di un tempo). Esso è il tempo caratteristico della convezione e misura la permanenza media della particella nel volume di controllo V_r . Il tempo t_r invece è caratteristico della instazionarietà e misura la rapidità della instazionarietà.

Se S_{tr} è molto piccolo la convezione è trascurabile rispetto alla instazionarietà e il regime si dice *instazionario*.

OSSERVAZIONE 2.1 Notiamo che pur avendo ricavato il numero di *Strouhal* dall'equazione di conservazione della massa, in esso la massa non compare. In realtà se avessimo scritto l'equazione della conservazione di una qualsiasi altra grandezza G , saremmo pervenuti (come è immediato verificare) alla stessa espressione di S_{tr} . Questo significa che l'importanza

relativa della convezione rispetto all'instazionarietà è sempre la stessa qualunque sia la grandezza che fluisce. ■

Adimensionalizziamo l'equazione del bilancio della quantità di moto, data dalla (2.2), che riscriviamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \int_{\Sigma} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{n} d\sigma = \int_V f dV .$$

Si ottiene

$$(2.5) \quad \frac{\rho_r v_r V_r}{t_r} \frac{\partial}{\partial t^*} \int_{V^*} \rho^* \mathbf{v}^* dV^* + \rho_r v_r^2 \Sigma_r \int_{\Sigma^*} \rho^* \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}^* \times \mathbf{n} d\sigma + \\ + p_r \Sigma_r \int_{\Sigma^*} \mathbf{p} \times \mathbf{n} d\sigma + \tau_{dr} \Sigma_r \int_{\Sigma^*} \boldsymbol{\tau}_d \times \mathbf{n} d\sigma = f_r V_r \int_{V^*} f^* dV^* .$$

Come è facile verificare, nella (2.5) i coefficienti dei fattori adimensionali hanno le dimensioni di una quantità di moto per unità di tempo, cioè di una forza. Dividendo primo e secondo membro della (2.5) per $\rho_r v_r^2 \Sigma_r$ si ottiene

$$(2.6) \quad \frac{1}{S_{tr}} \frac{\partial}{\partial t^*} \int_{V^*} \rho^* \mathbf{v}^* dV^* + \int_{\Sigma^*} \rho^* \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}^* \times \mathbf{n} d\sigma + \\ + \frac{p_r}{\rho_r v_r^2} \int_{\Sigma^*} \mathbf{p} \times \mathbf{n} d\sigma + \frac{\tau_{dr}}{\rho_r v_r^2} \int_{\Sigma^*} \boldsymbol{\tau}_d \times \mathbf{n} d\sigma = \frac{f_r V_r}{\rho_r v_r^2 \Sigma_r} \int_{V^*} f^* dV^* .$$

Osserviamo che nei tre nuovi numeri caratteristici la superficie di