INTRODUZIONE

Sotto la generica denominazione "integrali di funzioni di più variabili" trovano posto in realtà diversi concetti, che rappresentano generalizzazioni, in varie direzioni, del concetto di integrale per una funzione di una sola variabile reale su un intervallo $[a , b]$; ad esempio, data una funzione di due variabili $f(x , y)$, continua in un opportuno insieme D del piano xy, si può definire il simbolo $\iint_D f(x, y)dxdy$, cioè il cosiddetto *integrale doppio* della funzione f sul dominio D, il quale, nell'ipotesi $f(x , y) \geq 0$ su tutto D, è suscettibile di un'interpretazione geometrica analoga a quella dell'integrale $\int_a^b f(x)dx$: sarà infatti il *volume* dell'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } (x, y) \in D \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

cioè della regione di spazio compresa tra il piano xy, il grafico della funzione ed un'opportuna superficie cilindrica (costituita di segmenti paralleli all'asse z). Questo concetto di integrale si può estendere alle funzioni di n variabili reali (ad esempio per $n = 3$ si avranno gli *integrali tripli*), ed anche per un generico n è possibile interpretare l'integrale come misura di un opportuno insieme nello spazio di dimensione $n + 1$.

Si potranno poi considerare i cosiddetti *integrali curvilinei*, cioè integrali di funzioni di n variabili nei quali il dominio di integrazione è un arco di curva nello spazio $\mathbb{R}^n$; a tale proposito osserviamo subito che se $\mathscr{C}$ è un arco di curva nel piano xy, sarà necessario distinguere un integrale del tipo $\int_{\mathscr{C}} f(x, y)ds$ da un integrale del tipo $\int_{\mathscr{C}} f(x, y)dx + g(x, y)dy$: in quest'ultimo caso (che poi è il più significativo nelle applicazioni) le due funzioni f e g si possono considerare come le componenti di una funzione vettoriale delle due variabili x ed y: posto $\vec{F} = (f, g)$, l'ultimo integrale si può anche scrivere $\int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$. In modo analogo, se $\mathscr{C}$ è un arco di curva nello spazio, si potrà definire un integrale del tipo $\int_{\mathscr{C}} f(x, y, z) ds$ ovvero del tipo $\int_{\mathscr{C}} f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz$.

Infine, si definiranno gli *integrali superficiali*, nei quali una funzione di tre variabili viene integrata su una porzione S di superficie nello spazio. Anche in questo caso occorrerà distinguere un integrale del tipo $\int_S f(x, y, z) d\sigma$ da uno del tipo $\int_S f(x, y, z) dydz + g(x, y, z) dzdx + h(x, y, z) dxdy$: quest'ultimo, posto $\vec{F} = (f, g, h)$, si può anche scrivere in forma più compatta come $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$ (nel seguito saranno definiti in maniera esatta tutti questi simboli).

È interessante osservare che esistono dei notevoli collegamenti tra questi concetti: ad esempio, un importante teorema stabilisce un'uguaglianza tra un integrale doppio nel dominio D ed un integrale curvilineo calcolato sulla frontiera di D; analogamente, esistono teoremi che consentono di trasformare un integrale superficiale in un integrale curvilineo oppure in un integrale triplo. Nei prossimi capitoli saranno definiti tutti questi concetti e si vedranno svariate applicazioni di essi.