

## CINEMATICA DEI CORPI RIGIDI\*

**1. I vincoli.**

Si dice che un corpo  $C$  è *rigido*<sup>1</sup> se comunque si scelgono due punti di  $C$  la loro distanza non varia (durante il fenomeno in esame). Nel corso di questo capitolo ci riferiremo esclusivamente a corpi rigidi. La *terra* (o comunque la fondazione) su cui è costruita la struttura è nel seguito indicata col simbolo di fig. 1 ed è, a meno di avviso contrario, approssimata come un corpo rigido.



Fig. 1

Chiamiamo *vincolo* un dispositivo che collega più corpi. Un vincolo viene detto *esterno* se uno dei corpi da esso collegati è la terra, altrimenti viene detto *interno*.

Chiamiamo *struttura* un sistema di corpi vincolati. Diremo che una struttura è *piana* se esiste un piano che sia di simmetria (geometrica e di carico) per la struttura. Nel caso esista, tale piano è detto *piano della struttura*. Per il principio di simmetria della *Fisica*, se una struttura è piana essa resta tale (e conserva come piano di simmetria quello iniziale). Se una struttura è piana (è ovvio che) per descrivere completamente il comportamento dei corpi che la costituiscono basta riferire tutte le considerazioni e le figure al (la intersezione della struttura col) piano della struttura. Nel seguito ci occuperemo esclusivamente di strutture piane.

Chiamiamo *trave* un solido del tipo seguente. Siano  $q$  una spezzata del piano  $\alpha$ ,  $P$  un punto di  $q$ ,  $\beta$  il piano per  $P$  ortogonale a  $q$ ,  $A(P)$  un'area di  $\beta$  avente per baricentro  $P$  (fig. 2) e dimensioni medie trascurabili rispetto alla lunghezza di  $q$ . La trave si individua facendo occupare a  $P$  tutte le possibili posizioni su  $q$ . L'area  $A(P)$  è detta *sezione retta* della trave e supporremo sempre, nel seguito, che  $A(P)$  vari di poco al variare di  $P$ .

Chiameremo *struttura monodimensionale* una struttura i cui corpi sono travi (a sezione debolmente variabile). Nel seguito ci occuperemo esclusivamente di strutture monodimensionali. Più concisamente, una struttura monodimensionale piana sarà chiamata d'ora in poi (semplicemente) *struttura*.

Infine, limitiamo (ciò che abbiamo fatto ovunque) il nostro studio al campo delle piccole deformazioni. Ne segue, trattandosi di corpi rigidi, che gli spostamenti e le rotazioni

\* A. Maceri, *Cinematica dei corpi rigidi*, e-ISBN 978-88-85929-46-3, © Accademica 1999

<sup>1</sup> Si tratta di una utile schematizzazione. Nessun corpo reale è rigido.

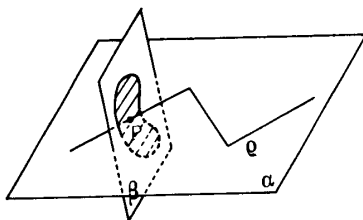


Fig. 2

sono sempre, per ipotesi, piccoli.

Ciò premesso, chiamiamo *grado di libertà* di una struttura <sup>2</sup> e denotiamo col simbolo  $l$  il numero di parametri (strettamente) necessari per individuare (nel piano della struttura) una delle possibili configurazioni della struttura. Naturalmente, le configurazioni possibili della struttura sono quelle secondo le quali possono disporsi le travi della struttura a seguito di un *cinematismo* (cioè di un movimento) consentito dai vincoli e tale che le componenti dello spostamento del generico punto di una qualsiasi trave e la rotazione di una qualsiasi trave siano piccoli.

**PROBLEMA 1.** *Si consideri un corpo (rigido) non vincolato e si denoti con  $C_1$  la posizione che esso occupa inizialmente nel piano (fig. 3). Provare che il numero dei parametri (strettamente) necessari per individuare, a partire da  $C_1$ , tutte le possibili configurazioni (cioè posizioni) del corpo nel piano è tre.*

Supponiamo infatti che il corpo, a causa di un arbitrario (per ipotesi il corpo non è vincolato) cinematismo (cioè movimento), si porti nella configurazione  $C'_1$  (fig. 3). Siano  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $Q_1$  due (qualsiasi) punti distinti di  $C_1$ ,  $r_1$  la retta per  $P_1$  e  $Q_1$ ;  $P'_1$ ,  $Q'_1$ ,  $r'_1$  le posizioni che occupano rispettivamente  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $r_1$  dopo il movimento. Denotiamo con  $s_1$  lo spostamento di  $P_1$  (cioè il vettore di primo estremo  $P_1$  e secondo estremo  $P'_1$ ), con  $u_1$  [risp.  $v_1$ ] la componente (ortogonale) di  $s_1$  su  $x$  [risp.  $y$ ], con  $\varphi_1$  l'angolo di cui occorre ruotare  $r$  per portarla su  $r'$  (positivo se antiorario).

Se si conoscono i tre numeri  $u_1, v_1, \varphi_1$  è nota (la configurazione)  $C'_1$  (cioè sono note le coordinate  $x', y'$  della posizione  $P'$  in cui si è portato per effetto del cinematismo il generico

-----  
<sup>1</sup> Che può anche essere costituita da travi non vincolate.

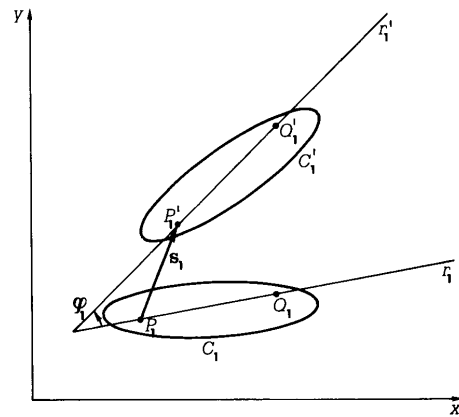


Fig. 3

punto  $P = (x, y)$  del corpo). Infatti è evidente che la configurazione  $C'_1$  può esser raggiunta dal corpo imprimendogli dapprima la traslazione rigida  $s_1$  (sicché  $P_1$  si porta in  $P'_1$ ) e successivamente facendolo ruotare di  $\varphi_1$  (*radianti* in verso antiorario) intorno a  $P'_1$ . A causa della traslazione rigida  $P$  si porta nella posizione  $\bar{P} = (x + u_1, y + v_1)$  (fig. 4).

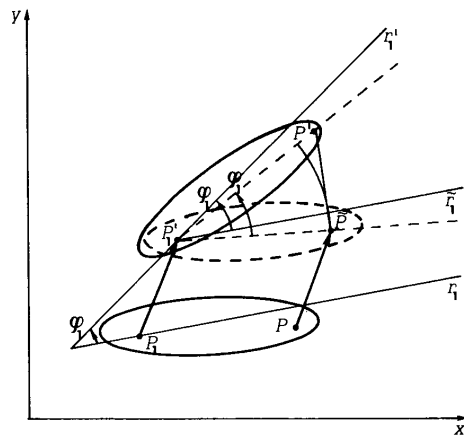


Fig. 4

Poiché  $\varphi_1$  è piccolo<sup>3</sup> possiamo ammettere che  $\tilde{P}$  si sposta secondo la tangente in  $P$  alla circonferenza di centro  $P'_1$  e raggio  $P'_1\tilde{P}$ , di  $\varphi_1 \text{dist}(P'_1, \tilde{P})$ . Pertanto (<sup>20</sup> del cap. 12)

$$x' = x_1 + u_1 - \varphi_1(y - y_1), \quad y' = y_1 + v_1 + \varphi_1(x - x_1).$$

In particolare, risulta che per effetto del cinematicismo il (generico) punto  $P = (x, y)$  del corpo subisce lo spostamento di componenti

$$\begin{aligned} u_P &= u_1 - \varphi_1(y - y_1) \\ v_P &= v_1 + \varphi_1(x - x_1). \end{aligned}$$

Consideriamo un vincolo  $V$  che collega  $m$  corpi. Denotiamo con  $S_0$  il sistema costituito dagli  $m$  corpi non vincolati e con  $S$  il sistema costituito dagli  $m$  corpi collegati dal vincolo  $V$ . Dal problema 1 segue immediatamente che il grado di libertà di  $S_0$  è  $3m$ . Precisamente detti  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$   $P_i$  un punto del corpo  $i$ ,  $u_i$  e  $v_i$  le componenti dello spostamento di  $P_i$ ,  $\varphi_i$  la rotazione del corpo  $i$ , tutte le possibili configurazioni di  $S_0$  si ottengono (dalla configurazione iniziale) dando ai  $3m$  parametri

$$(1) \quad u_1, v_1, \varphi_1, \dots, u_m, v_m, \varphi_m$$

tutti i possibili valori reali e piccoli<sup>3</sup>. Il dispositivo vincolare  $V$  collega gli  $m$  corpi del sistema. Esso può obbligare due o più degli  $m$  corpi ad avere la stessa rotazione. Oppure può obbligare due o più degli  $m$  corpi ad avere una (ed eventualmente anche l'altra) componente dello spostamento di un punto eguale. Abbiamo visto (problema 1) che in un corpo rigido  $i$  le componenti dello spostamento del generico punto  $P$  sono esprimibili (semplicemente) in funzione di  $u_i, v_i, \varphi_i$ . Pertanto il vincolo  $V$  si traduce analiticamente in alcune equazioni, che sono dette *equazioni di vincolo*<sup>4</sup> e che pongono in relazione tra loro i parametri (1). Ovviamente, risolvendo il sistema delle equazioni del vincolo  $V$ , possiamo esprimere alcuni dei parametri (1) in funzione dei rimanenti. Questi ultimi sono palesemente i parametri del sistema  $S$ , sicché il loro numero fornisce il grado di libertà di  $S$ . Chiamiamo *ordine* del vincolo  $V$  la differenza tra il grado di libertà di  $S_0$  e il grado di libertà di  $S$ .

Chiamiamo *incastro* un dispositivo vincolare che colleghi rigidamente due corpi. Evidentemente il grado di libertà di  $S_0$  è 6; quello di  $S$  è 3; quindi l'incastro ha ordine tre. Consideriamo la trave di fig. 5. Per indicare il fatto che la trave è incastrata (a terra) in  $A$  si usa il simbolo di fig. 6. Ovviamente si può pensare che in una qualsiasi sezione  $B$  della trave



Fig. 5



Fig. 6

<sup>3</sup> Per ipotesi spostamenti e rotazioni sono ovunque piccoli.

<sup>4</sup> I vincoli che sono rappresentati matematicamente da equazioni [risp. disequazioni] sono detti *bilaterali* [risp. *unilaterali*]. Ci limiteremo qui e nel seguito al caso di vincoli bilaterali. Le questioni analitiche che insorgono per la presenza di vincoli unilaterali in una struttura reale (cioè costituita da corpi deformabili) sono ancora in via di elaborazione (in *Analisi funzionale*).

(fig. 5) sia presente un incastro interno (cioè può essere utile pensare che siano assegnate le due travi  $AB$  e  $BC$  e che queste siano vincolate in  $B$  con un incastro interno).

Chiamiamo *incastro scorrevole* un dispositivo vincolare che colleghi due corpi  $A$  e  $B$  nel modo seguente. Al corpo  $A$  sono solidali due o più ruote (che supponiamo possano girare senza attrito) allineate secondo la direzione  $r$  (fig. 7). Al corpo  $B$  è solidale un doppio binario (fig. 8). Le ruote (che possono rotolare senza attrito nel doppio binario) collegano i due corpi  $A$  e  $B$  in modo tale che (fig. 9) questi possono solo traslare l'uno rispetto all'altro secondo la direzione  $r$  (fig. 10).

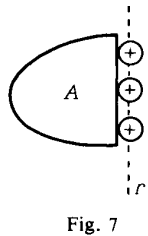


Fig. 7

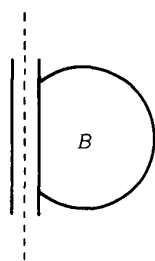


Fig. 8

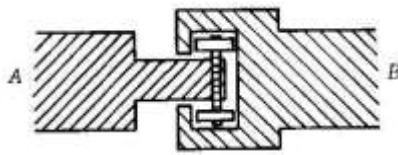


Fig. 9

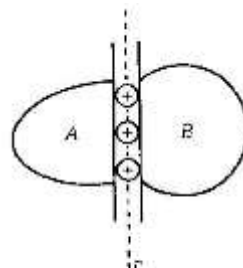


Fig. 10

Evidentemente il grado di libertà del sistema  $S_0$  costituito dai corpi  $A$  e  $B$  non vincolati è 6. Quello del sistema  $S$  di fig. 10 è 4. Infatti tre parametri individuano la posizione nel piano del corpo  $A$  e un solo parametro basta per individuare la posizione di  $B$  rispetto ad  $A$ <sup>5</sup>. Pertanto l'incastro scorrevole ha ordine due. Se uno dei due corpi è la terra, si usa il simbolo di fig. 11.

<sup>5</sup> Denotiamo con  $O$  un punto del piano, con  $y$  la parallela per  $O$  ad  $r$ , con  $x$  la normale per  $O$  ad  $y$ . Denotiamo con  $P_1$  [risp.  $P_2$ ] un punto di  $A$  [risp.  $B$ ] e con  $Q = (x, y)$  un punto della retta  $r$  che costituisca (nella configurazione iniziale) la posizione sia di un punto  $Q_1$  di  $A$  che di un punto  $Q_2$  di  $B$  (ad esempio il centro di una ruota), sicché  $Q_1 = Q_2 = Q$ . I parametri di  $S_0$  sono  $u_1, v_1, \varphi_1, u_2, v_2, \varphi_2$ . È ovvio che l'incastro scorrevole impone da un lato  $\varphi_1 = \varphi_2$ ; dall'altro che (la componente dello spostamento di  $Q_1$  e  $Q_2$  secondo la normale alla direzione di scorrimento  $r = y$  sono eguali, cioè)  $u_{Q_1} = u_{Q_2}$ . Pertanto la seconda equazione di vincolo è (problema 1)  $u_1 - \varphi_1(y - y_1) = u_2 - \varphi_2(y - y_2)$ . Con ciò  $\varphi_1 = \varphi_2$ ,  $u_1 = \varphi_2(y - y_1) + u_2 - \varphi_2(y - y_2)$ . Così i parametri del sistema  $S$  (rimasti) sono  $v_1, u_2, v_2, \varphi_2$  e di conseguenza  $S$  ha grado di libertà 4.

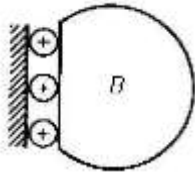


Fig. 11

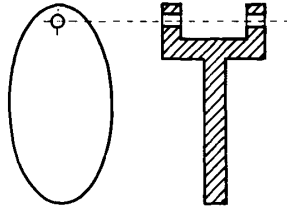


Fig. 12

Chiamiamo *cerniera* un dispositivo vincolare che colleghi  $m$  corpi nel modo seguente. Ogni corpo presenta un foro a sezione circolare di raggio  $r$  (fig. 12). Un perno (che nel seguito chiameremo anche cerniera) di sezione circolare di raggio  $r$  collega gli  $m$  corpi. Il perno ed i fori hanno superfici perfettamente lisce, sicché il perno può girare nei fori liberamente, senza attrito. Inoltre il dispositivo è realizzato in modo che ciascuno degli  $m$  corpi non tocca nessuno dei rimanenti  $m - 1$  corpi (cosicché non c'è interazione tra due degli  $m$  corpi, ma solo tra ciascuno degli  $m$  corpi e il perno). In fig. 13 è mostrato il collegamento di due corpi; se i corpi sono più di due, si hanno allo stesso modo altrettante forcelle, una interna all'altra, così da non essere in contatto tra loro. Evidentemente il sistema  $S_0$  costituito dagli  $m$  corpi non vincolati ha grado di libertà  $3m$ . Il sistema  $S$  costituito dagli  $m$  corpi vincolati dalla cerniera (fig. 14) ha il seguente grado di libertà. Tre parametri individuano la posizione nel piano del corpo 1. A questo punto ciascuno dei rimanenti  $m - 1$  corpi può solo girare intorno al centro del perno. Perciò per ciascuno di essi un parametro (che può essere l'angolo rispetto alla orizzontale) ne individua la posizione. In definitiva per individuare una posizione dei corpi

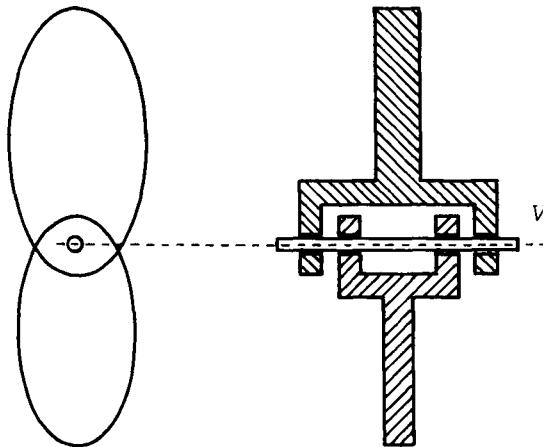


Fig. 13



Fig. 14

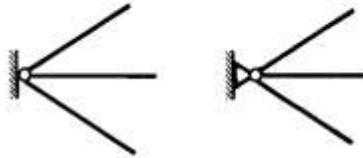


Fig. 15

del sistema  $S$  servono  $3 + (m - 1) \cdot 1 = 3 + m - 1 = m + 2$  parametri. Perciò l'ordine della cerniera è  $3m - (m + 2) = 2(m - 1)$ . Se uno dei corpi è la terra, si usano indifferentemente i simboli di fig. 15. Nel caso in cui la cerniera collega la terra a un solo corpo si usa anche il simbolo di fig. 16.



Fig. 16

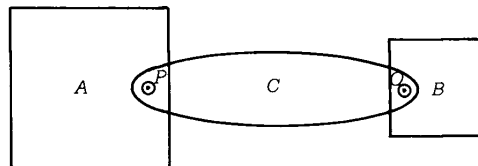


Fig. 17

Si chiama *pendolo* un dispositivo che vincola due corpi  $A$  e  $B$  ed è costituito da un corpo  $C$  e da due perni (fig. 17). Nel seguito però preferiremo spesso considerare anche  $C$  come corpo del sistema e conseguentemente computare una cerniera in  $P$  e una cerniera in  $Q$  (fig. 17). Valutiamo l'ordine del pendolo. Siano  $P_1$  [risp.  $P_2$ ] un punto di  $A$  [risp.  $B$ ] e denotiamo con  $P'$  [risp.  $Q'$ ] la posizione assunta da  $P$  [risp.  $Q$ ] dopo un (arbitrario) cinematismo. Il pendolo, evidentemente, è rappresentato da un'unica equazione di vincolo, e precisamente

$$dist(P', Q') = dist(P, Q)$$

sicché (problema 1)

$$dist((x_P + u_1 - \varphi_1(y_P - y_1)), (y_P + v_1 + \varphi_1(x_P - x_1)), (x_Q + u_2 - \varphi_2(y_Q - y_2)), (y_Q + v_2 + \varphi_2(x_Q - x_2))) = dist((x_P, y_P), (x_Q, y_Q))$$

e di qui

$$(2) \quad [x_P + u_1 - \varphi_1(y_P - y_1) - x_Q - u_2 + \varphi_2(y_Q - y_2)]^2 + \\ + [y_P + v_1 + \varphi_1(x_P - x_1) - y_Q - v_2 - \varphi_2(x_Q - x_2)]^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 .$$

Se ne trae<sup>6</sup>

$$(3) \quad u_1 = -x_P + \varphi_1(y_P - y_1) + x_Q + u_2 - \varphi_2(y_Q - y_2) + \\ + \left\{ (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 - [y_P + v_1 + \varphi_1(x_P - x_1) - y_Q - v_2 - \varphi_2(x_Q - x_2)]^2 \right\}^{1/2} .$$

Poiché  $S_0$  ha grado di libertà 6 ed  $S$ , per la (3), ha grado di libertà 5, si ha che il pendolo ha ordine uno.

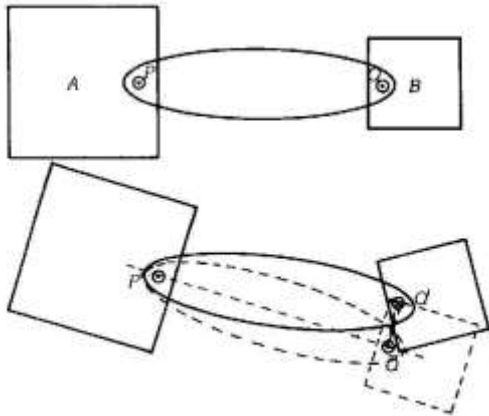


Fig. 18

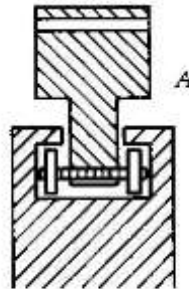


Fig. 19

Si chiama *carrello* un dispositivo che vincola la terra ad  $h$  corpi, nel modo seguente. Alla terra è solidale un doppio binario (fig. 19). Ad un corpo  $A$  (fig. 19), che fa parte del dispositivo vincolare e non degli  $h$  corpi collegati alla terra, sono solidali due o più ruote (che supponiamo allineate e che possano girare senza attrito). Inoltre il corpo  $A$  è collegato agli  $h$  corpi del sistema tramite una cerniera (fig. 20). Le ruote del carrello (che possono rotolare senza attrito nel doppio binario) collegano la terra e il corpo  $A$  che conseguentemente può al

<sup>6</sup> Nel ricavare la (3) dalla (2) non c'è indeterminazione di segno. Infatti dalla <sup>3</sup> segue facilmente che la configurazione finale del sistema si può ottenere imprimendo a tutto il sistema il cinematismo indotto dal moto di  $A$  (sicché  $P$  si porta in  $P'$  e  $Q$  in una posizione  $\bar{Q}$ ) e poi facendo ruotare  $C$  intorno a  $P'$  finché  $\bar{Q}$  si porta in  $Q'$  (spostandosi in pratica secondo la normale per  $\bar{Q}$  a  $P'Q'$ ), e infine facendo ruotare  $B$  intorno a  $Q'$  di  $\varphi_2 - \varphi_1$ , con il che esso raggiunge la sua configurazione finale (fig. 18).



473

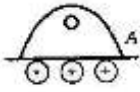


Fig. 20

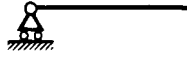


Fig. 21



Fig. 22

più traslare rispetto alla terra e secondo la direzione del doppio binario (fig. 21). Nel caso  $h = 1$  si usano indifferentemente i simboli di figg. 21 e 22. Circa l'ordine del carrello, si ha quanto segue. Il sistema  $S_0$  ha grado di libertà  $3h$ . Circa il sistema  $S$  (fig. 23), un parametro  $u_C$  individua (nel piano) la posizione della cerniera  $C$  (che appunto può solo traslare lungo la retta  $r$ ); a questo punto per ciascun corpo  $i \in \{1, \dots, h\}$  la posizione è individuata assegnando la rotazione  $\varphi_i$ . Pertanto il grado di libertà di  $S$  è  $1 + h$ . Per altra via (scrivendo il sistema delle equazioni di vincolo) abbiamo che  $\forall i \in \{1, \dots, h\}$ , scegliendo  $P_i$  coincidente con  $C$  e l'asse  $x$  coincidente con  $r$  (fig. 23), dovendosi  $P_i = C$  spostare sull'asse  $x = r$ , deve essere  $v_i = 0$ ; inoltre  $u_2 = u_1, \dots, u_h = u_1$ . Pertanto il sistema delle equazioni di vincolo è costituito da  $h + (h - 1)$  equazioni, e ciò comporta che  $S$  ha grado di libertà  $h + 1$ . Ne consegue che il carrello che collega  $h$  corpi ha ordine  $2h - 1$ .

OSSERVAZIONE 1. Il simbolo che viene usato per indicare il carrello (fig. 23) è poco felice in quanto fa pensare che le ruote possano sollevarsi dal terreno (nel qual caso si tratterebbe di un vincolo unilaterale, con tutte le conseguenze del caso <sup>4</sup>), ciò che è escluso (fig. 19).

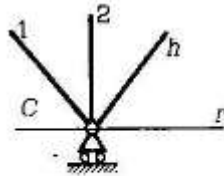


Fig. 23

Si chiama *doppio incastro scorrevole* un dispositivo che vincola due corpi  $A$  e  $B$  nel modo seguente. Al corpo  $A$  [risp.  $B$ ] sono solidali due o più ruote, che supponiamo possano

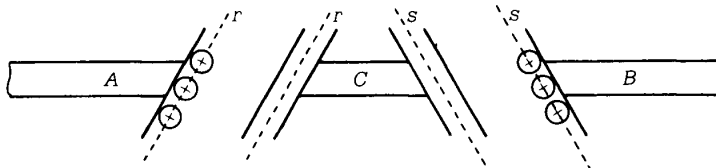


Fig. 24



Fig. 25

girare senza attrito e che sono allineate secondo la direzione  $r$  [risp.  $s$  distinta da  $r$ ] (fig. 24). Ad un corpo  $C$  (che fa parte del dispositivo vincolare) sono solidali due doppi binari, uno parallelo ad  $r$  e l'altro ad  $s$ . È evidente che il doppio incastro scorrevole (fig. 25) è rappresentato soltanto da una equazione di vincolo, e precisamente  $\varphi_1 = \varphi_2$ ; ne consegue, avendo  $S_0$  grado di libertà 6, che  $S$  ha grado di libertà 5. Pertanto il doppio incastro scorrevole ha ordine 1.

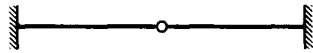


Fig. 26

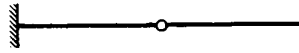


Fig. 27

OSSERVAZIONE 2. Il doppio incastro scorrevole impone ai corpi  $A$  e  $B$  di ruotare dello stesso angolo, ma consente al corpo  $B$  di traslare rispetto al corpo  $A$  secondo una qualsiasi direzione<sup>3</sup>.

OSSERVAZIONE 3. In genere le travi di una struttura sono collegate da più di un vincolo. Ciò implica che un vincolo di ordine  $j$  può eliminare  $j$  gradi di libertà (nel senso che non è detto che elimini effettivamente  $j$  gradi di libertà). Ad esempio nella struttura di fig. 26 l'incastro di destra, che ha ordine 3, non elimina tre gradi di libertà. Infatti la struttura ottenuta eliminando tale incastro (fig. 27) ha grado di libertà 1 (perché la trave di sinistra è obbligata dall'incastro a restare ferma; quindi la cerniera non si può spostare; quindi la trave di destra può solo ruotare intorno alla cerniera; quindi un parametro è sufficiente per individuare la posizione della trave di destra) e ciò implica che l'incastro di destra di fig. 26 elimina soltanto un grado di libertà mentre potrebbe eliminarne tre.

## 2. Strutture labili, isostatiche, iperstatiche.

Diremo che una struttura è *labile* quando ha grado di libertà  $l > 0$ . Se una struttura ha grado di libertà  $l > 0$ , diciamo anche che (essa) ha *grado di labilità*  $l$  (oppure che è  $l$  volte *labile*). Diremo che una struttura è *isostatica* quando ha grado di libertà  $l = 0$  e la struttura che si ottiene degradando uno qualsiasi dei suoi vincoli<sup>7</sup> è labile. Diremo che una struttura  $S$  (avente grado di libertà  $l \geq 0$ ) è *iperstatica* quando da essa è possibile ottenere, degradando (almeno uno de) i suoi vincoli, una (nuova) struttura  $\tilde{S}$  avente ancora grado di libertà  $l$ . Denotiamo con  $s$  la somma degli ordini dei vincoli di  $S$  e con  $\tilde{s}$  la somma degli ordini dei vincoli di  $\tilde{S}$ . Chiamiamo *grado di iperstaticità* di  $S$ , e denotiamo col simbolo  $i$ , la più grande delle differenze  $s - \tilde{s}$  al variare di  $\tilde{S}$  in tutti i modi possibili. Se  $S$  ha grado di iperstaticità  $i$ , diciamo anche che  $S$  è  $i$  volte *iperstatica*.

<sup>7</sup> Ad esempio sostituendo ad un incastro una cerniera.

OSSERVAZIONE 4. E' ovvio che una struttura isostatica ha  $l = 0$  e  $i = 0$ . Altrettanto ovvio è che una struttura con  $l = 0$  e  $i = 0$  è isostatica.

OSSERVAZIONE 5. Ad una struttura labile, essendo  $l > 0$ , sono consentiti cinematismi. In altri termini, i vincoli consentono alle travi della struttura di muoversi e di assumere con ciò posizioni diverse <sup>3</sup> da quelle della configurazione iniziale.



Fig. 28

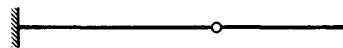


Fig. 29

OSSERVAZIONE 6. Ad una struttura isostatica, essendo  $l = 0$ , non sono consentiti cinematismi. Le travi della struttura possono avere (nel piano) soltanto una posizione, che è quella della configurazione iniziale.

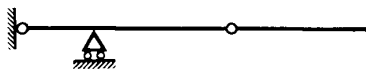


Fig. 30

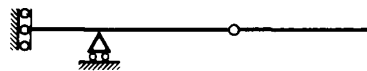


Fig. 31

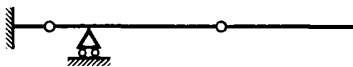


Fig. 32

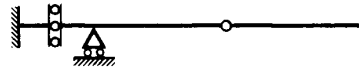


Fig. 33

OSSERVAZIONE 7. Una struttura può essere simultaneamente labile ed iperstatica. Tale è ad esempio quella di fig. 28. La struttura  $S$  è infatti costituita da due travi. La trave di sinistra è bloccata dall'incastro. Quindi la cerniera non si può spostare. Quindi la trave di destra può soltanto ruotare intorno alla cerniera. Ne segue  $l = 1$ . È poi ovvio che  $s = 3 + 1 + 2 = 6$ . Consideriamo la struttura  $\tilde{S}_1$  ottenuta da  $S$  eliminando il carrello (fig. 29). È ovvio che  $\tilde{S}_1$  ha grado di libertà 1 e  $\tilde{s}_1 = 3 + 2 = 5$ . Consideriamo la struttura  $\tilde{S}_2$  [risp.  $\tilde{S}_3$ ] ottenuta da  $S$  degradando l'incastro in una cerniera [risp. incastro scorrevole] (fig. 30 [risp. 31]). È ovvio che  $\tilde{S}_2$  [risp.  $\tilde{S}_3$ ] ha grado di libertà 1 e  $\tilde{s}_2$  [risp.  $\tilde{s}_3$ ] =  $2 + 1 + 2 = 5$ . Consideriamo la struttura  $\tilde{S}_4$  [risp.  $\tilde{S}_5$ ] ottenuta da  $S$  degradando l'incastro interno (a destra dell'incastro esterno e a sinistra del carrello) in una cerniera [risp. un incastro scorrevole] (fig. 32 [risp. 33]). È ovvio che  $\tilde{S}_4$  [risp.  $\tilde{S}_5$ ] ha grado di libertà 1 e  $\tilde{s}_4$  [risp.  $\tilde{s}_5$ ] =  $3 + 2 + 1 + 2 = 8$  (però in tali casi la presenza dell'incastro interno comporta che  $s = 3 + 3 + 1 + 2 = 9$ ). È immediato riconoscere che qualsiasi altro modo di degradare i vincoli di  $S$  genera una struttura  $\tilde{S}$  con grado di libertà

$l > 1$ . Pertanto

$$i = \max\{s - \bar{s}\} = \max\{6 - 5, 6 - 5, 6 - 5, 9 - 8, 9 - 8\} = 1.$$

Quindi la struttura di fig. 28 ha

$$l = 1, i = 1$$

sicché è simultaneamente labile ed iperstatica.

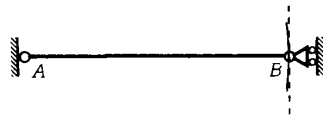


Fig. 34

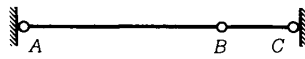


Fig. 35

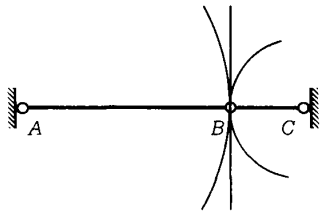


Fig. 36



Fig. 37

OSSERVAZIONE 8. La labilità di una struttura può dipendere da cattiva disposizione di vincoli anziché da insufficienza di vincoli. Due casi importanti di labilità da cattiva disposizione dei vincoli sono quelli di fig. 34 e di fig. 35. In fig. 34 la trave, essendo incernierata in A, può ruotare intorno alla cerniera A. In tale moto B si sposta lungo la circonferenza di centro A e raggio  $dist(A, E)$ . Anzi, stante l'ipotesi di piccole deformazioni, approssimiamo tale moto con quello lungo la tangente in B alla circonferenza<sup>3</sup>. Poiché il carrello è (male) disposto col binario di scorrimento parallelo a tale tangente, niente impedisce a B tale possibilità di movimento. In conclusione la trave appoggiata di fig. 34 ha  $l = 0, i = 0$ <sup>3</sup>.

L'arco a tre cerniere con cerniere allineate di fig. 35 è anch'esso labile. Infatti la cerniera B appartiene al pendolo AB e quindi può spostarsi lungo la circonferenza di centro A [risp. C] e raggio  $dist(AB)$  [risp.  $dist(B, C)$ ] (fig. 36). Approssimando tale moto con quello lungo la tangente in B alla circonferenza<sup>3</sup>, si ha che niente si oppone a che esso avvenga. Se ne trae  $l = 1, i = 0$ .

Un arco a tre cerniere con cerniere non allineate, invece, è isostatico (fig. 37). Infatti, ragionando come prima, si ha che B deve spostarsi simultaneamente secondo la tangente r [risp. s] in B alla circonferenza di centro A [risp. C] e raggio  $dist(AB)$  [risp.  $dist(B, C)$ ] (fig. 38). Quindi B deve appartenere simultaneamente alle rette distinte r ed s. Quindi B resta fermo nella posizione iniziale è ciò implica  $l = 0, i = 0$ .

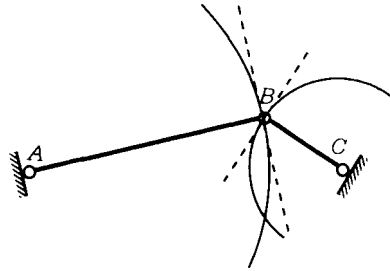


Fig. 38

Consideriamo una struttura costituita da  $t$  travi aperte <sup>8</sup>. Assumiamo un riferimento cartesiano ortogonale  $O,x,y$  (fig. 42) e denotiamo  $\forall i \in \{1, \dots, t\}$  con  $P_i$  un punto della trave  $i$ , con  $u_i$  [risp.  $v_i$ ] la componente secondo  $x$  [risp.  $y$ ] dello spostamento di  $P_i$ , con  $\varphi_i$  la rotazione della trave (rigida)  $i$  <sup>3</sup>. Denotiamo con  $X$  il vettore colonna

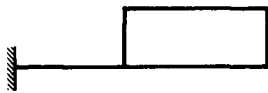


Fig. 39

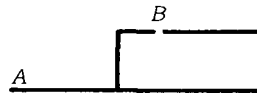


Fig. 40

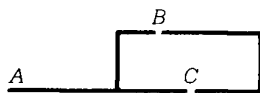


Fig. 41

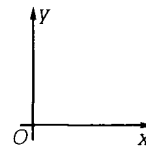


Fig. 42

<sup>8</sup> Qualora siano presenti nella struttura travi chiuse, come nel caso di fig. 39, ci si riduce al caso di travi aperte impiegando la nozione di incastro interno. Così, diremo che la struttura di fig. 39 è composta da una trave, con un incastro esterno in  $A$  ed un incastro interno in  $B$  (fig. 40). È anche lecito (ed equivalente) pensare che la struttura di fig. 39 è composta di due travi, con un incastro esterno in  $A$ , un incastro interno in  $B$  e un incastro interno in  $C$ .

$$(4) \quad X = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ \dots \\ u_t \\ v_t \\ \varphi_t \end{bmatrix} .$$

Rappresentiamo i vincoli della struttura con le loro equazioni di vincolo. È ovvio che ogni vincolo è rappresentato analiticamente da tante equazioni quanto è il suo ordine; perciò, detta  $s$  la somma degli ordini dei vincoli della struttura, sia ha che il sistema delle equazioni di vincolo è costituito da  $s$  equazioni. Nelle ipotesi in cui ci siano posti<sup>3</sup>, inoltre, ogni equazione di vincolo si può approssimare (quando non lo sia già) con una equazione algebrica lineare nelle  $3t$  incognite  $u_1, v_1, \varphi_1, \dots, u_t, v_t, \varphi_t$ <sup>9</sup>. Con ciò il sistema delle equazioni di vincolo si riduce ad un sistema algebrico lineare di  $s$  equazioni nelle  $3t$  incognite (4). Denotandone con  $B$  la colonna dei termini noti e con  $C$  la matrice dei coefficienti (sicché  $C$  è una matrice  $s \times 3t$ ) esso si scrive

$$(5) \quad CX = B .$$

Lo studio del problema (5), che si esegue con i metodi (classici) dell'*Algebra lineare*, consente di valutare completamente il grado di labilità e quello di iperstaticità di una qualsiasi struttura (costituita da travi aperte).

OSSERVAZIONE 9. Si può provare che nel problema (5) il vettore (colonna) dei termini noti  $B$  è (sempre) nullo

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} .$$

PROBLEMA 2. *Eeguire l'analisi cinematica della struttura di fig. 43.*

Assumiamo il riferimento di fig. 42 (con l'origine in  $A$ ); come trave 1 [risp. 2] la trave  $AB$  [risp.  $BC$ ]; come punto  $P_1$  [risp.  $P_2$ ] il punto  $A$  [risp.  $C$ ]. Le incognite sono quindi

$$(6) \quad u_1, v_1, \varphi_1, u_2, v_2, \varphi_2 .$$

Le equazioni sono, in corrispondenza della cerniera  $A$

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0 ;$$

-----  
<sup>9</sup> Quando si opera in tal modo si usa dire che si linearizza l'equazione di vincolo.

in corrispondenza della cerniera  $C$

$$u_2 = 0, \quad v_2 = 0;$$

in corrispondenza della cerniera  $B$  (problema 1)

$$\begin{aligned} u_1 - \varphi_1 l &= (u_B)_1 = (u_B)_2 = u_2 - \varphi_2 l \\ v_1 + \varphi_1 l &= (v_B)_1 = (v_B)_2 = v_2 - \varphi_2 l . \end{aligned}$$

Il problema (5) si scrive quindi

$$(7) \quad \begin{aligned} u_1 &= 0 \\ v_1 &= 0 \\ u_2 &= 0 \\ v_2 &= 0 \\ u_1 - \varphi_1 l - u_2 + \varphi_2 l &= 0 \\ v_1 + \varphi_1 l - v_2 + \varphi_2 l &= 0 . \end{aligned}$$

Si tratta di un sistema algebrico lineare omogeneo di sei equazioni nelle sei incognite (6). Il determinante della matrice dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -l & -1 & 0 & l \\ 0 & 1 & l & 0 & -1 & l \end{vmatrix}$$

è diverso da zero. Ne segue, per un (celebre) teorema dell'*Algebra lineare*, che il problema (7) ammette una e una sola soluzione che è

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad v_2 = 0, \quad \varphi_2 = 0 .$$

Pertanto non sono possibili cinematismi ed ogni equazione del sistema (7) è efficace (cioè è indipendente dalle rimanenti); ne segue che  $l = 0, i = 0$  e la struttura è isostatica.

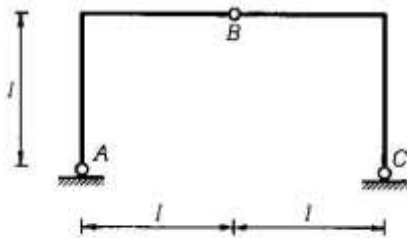


Fig. 43



Fig. 44

PROBLEMA 3. Eseguire l'analisi cinematica della struttura di fig. 44.

Assumiamo il riferimento di fig. 42 (con l'origine in  $A$  e  $P_1 = A$ ). Le incognite sono quindi

$$(8) \quad u_1, v_1, \varphi_1 .$$

Le equazioni sono, in corrispondenza della cerniera  $A$

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0 .$$