COMPLEMENTI DI CINEMATICA *

1.5.1. Complementi di cinematica dei corpi rigidi. Consideriamo una struttura composta da $t\ (\in N)$ corpi rigidi vincolati $(A_1, ..., A_t)$. Supponiamo i vincoli rigidi e denotiamo con $s\ (\in N)$ la somma dei loro ordini. Per ogni $i \in \{1, ..., n\}$ denotiamo con P_i un arbitrario punto di A_i, con u_i e v_i le componenti dello spostamento di P_i e con φ_i la rotazione del corpo A_i (rispetto alla configurazione iniziale della struttura). Denotiamo con U il vettore numerico

* A. Maceri, *Complementi di Cinematica*, e-ISBN 978-88-85929-55-5, © Accademica 2003

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ .... \\ u_t \\ v_t \\ \varphi_t \end{bmatrix},$$

con B il vettore numerico nullo (avente $3t$ componenti)

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$$

e scriviamo le equazioni di vincolo, che costituiscono {1.3} un sistema algebrico lineare di s equazioni nelle $3t$ incognite $u_1, v_1, \varphi_1, ..., u_t, v_t, \varphi_t$. Denotiamo con C la matrice dei coefficienti, sicché

$$CU = B, \tag{1.5.1}$$

e denotiamo con r il rango di C. Esiste quindi un minore Q di C di ordine r tale che $det Q \neq 0$. Denotiamo con $i_1, ..., i_r$ le righe di Q e con $j_1, ..., j_r$ le colonne di Q.

Cancelliamo nel sistema algebrico lineare (1.5.1) le righe distinte da $i_1, ..., i_r$ e portiamo a destra (nella colonna dei termini noti) le colonne distinte da $j_1, ..., j_r$. Otteniamo così un sistema r equazioni in r incognite la cui matrice di coefficienti è Q.

$$QU = \widetilde{B} \tag{1.5.2}$$

Poiché il sistema (1.5.2) è di *Cramer*, assegnando ad arbitrio dei valori (reali) ai $3t - r$ parametri che sono stati trasportati a destra (nella colonna dei termini noti $\widetilde{B}$) si ottiene che gli r parametri che sono rimasti a primo membro nella (1.5.2) sono univocamente determinati. Quindi assegnando ad arbitrio $3t - r$ dei $3t$ parametri $u_1, v_1, \varphi_1, ..., u_t, v_t, \varphi_t$ viene univocamente individuata una configurazione della struttura. Pertanto

(1.5.3) $$l = 3t - r$$

Poiché il rango di una matrice è non maggiore del numero delle sue colonne, risulta

$$l \geq 0.$$

Nel caso $r = 3t$ evidentemente $l = 0$ e i vincoli non consentono ai corpi della struttura alcun movimento. In tal caso si dice anche che la struttura è non cinematica.

Del pari evidente è che cancellare nella equazione matriciale (1.5.1) in parte o in toto le righe distinte da $i_1,..., i_r$ significa considerare una nuova struttura attenuta dalla precedente degradandone in parte o in toto (nel qual caso è più appropriato parlare di eliminazione) i vincoli. Significa anche (in termini di *calcolo matriciale*) che la nuova struttura così ottenuta ha lo stesso grado di libertà l della struttura di partenza. Significa anche (in termini di *calcolo matriciale*) che se cancello qualcuna delle righe $i_1,..., i_r$ ottengo una nuova struttura (la cui matrice ha rango minore di r e quindi) che ha grado di libertà maggiore di quella della struttura di partenza.
Pertanto

(1.5.4) $$i = s - r$$

e di qui e dalla (1.5.3) si ottiene

(1.5.5) $$3t - s = l - i.$$

PROBLEMA 1.5.1. *Eseguire l'analisi cinematica della struttura di fig.1.5.1.*

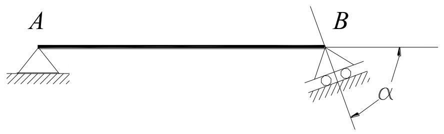

Fig.1.5.1

La struttura è costituita da t = 1 corpi. Una qualsiasi *posizione* (dei corpi della struttura) si ottiene fissando u_1, v_1 (spostamenti orizzontale e verticale di A) e φ_1 (angolo che AB forma con l'orizzontale). La presenza dei vincoli non consente nella struttura (vincolata) di assegnare ad arbitrio questi parametri. Dunque risulta (essendovi in A una cerniera)

$$u_1 = 0$$
$$v_1 = 0\,.$$

Inoltre essendovi in *B* un carrello deve essere

$$l\varphi_1 sen\alpha = 0$$

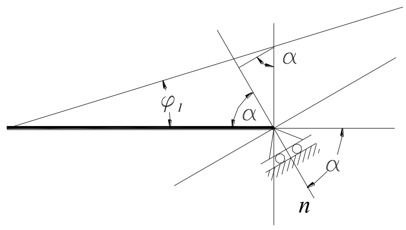

Fig. 1.5.2

e di qui, essendo *l* >0,

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ v_1 &= 0 \qquad (1.5.6) \\ (sen\alpha)\,\varphi_1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Evidentemente $\alpha \in [0,\pi]$. Se $\alpha \neq 0$ o se $\alpha \neq \pi$ è $sen\alpha \neq 0$ e in conseguenza deve essere

$$u_1 = 0$$
$$v_1 = 0$$
$$\varphi_1 = 0$$

cioè i vincoli non consentono alla struttura posizioni nel piano distinte da quella di fig. 1.5.1.

Se $\alpha = 0$ o se $\alpha = \pi$ è $sen\alpha = 0$ sicché

$$u_1 = 0$$
$$v_1 = 0$$

φ_1 può assumere qualsiasi valore (purché piccolo).

Quindi c'è un parametro che possiamo assegnare ad arbitrio; quindi (fig. 1.5.3)

l=1.

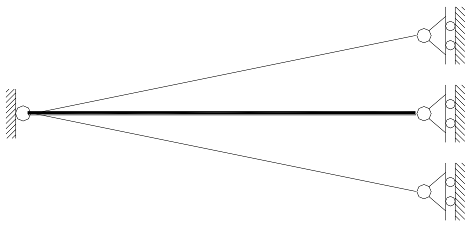

Fig.1.5.3

Dal punto di vista algebrico, le (1.5.6) sono un sistema di equazioni algebriche lineari di 3 equazioni nelle 3 incognite u_1, v_1, φ_1 . Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & sen\alpha \end{vmatrix} = sen\alpha.$$

Se $\alpha \in \left]0,\pi\right[$ è $sen\alpha \neq 0$ e per Cramer il problema (1.5.1) ammette l'unica soluzione

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ v_1 &= 0 \\ \varphi_1 &= 0 \end{aligned}$$

cioè la trave non può assumere posizioni distinte da quelle iniziali (sicché l=0). Se $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$ è $sen\alpha = 0$. Poiché

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

allora il sistema (1.5.6) ammette ∞^1 soluzioni:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ v_1 &= 0 \\ \varphi_1 &\quad \text{qualsiasi (purché piccolo)} \end{aligned}$$

sicché la struttura ha l=1.

PROBLEMA 1.5.2. *Determinare l ed i della struttura di fig. 1.5.4* $(a > 0, h \geq 0)$.

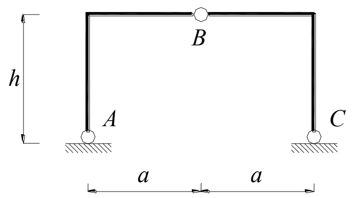

Fig. 1.5.4

Procediamo per via matriciale. La struttura è costituita da t = 2 corpi. Denotiamo con u_1, v_1 le componenti dello spostamento di A; con u_2, v_2 quelle di C. Sia φ_1 una rotazione (antioraria) del tronco AB intorno ad A; φ_2 una rotazione (antioraria) del tronco CB intorno a C. Scriviamo le equazioni di vincolo (fig.1.5.5)

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0 \\
v_1 &= 0 \\
u_2 &= 0 \\
v_2 &= 0 \\
h\varphi_1 &= h\varphi_2 \\
a\varphi_1 &= -a\varphi_2
\end{aligned}
$$

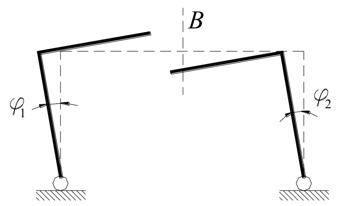

Fig. 1.5.5

che forniscono il sistema algebrico lineare in forma canonica (è $a > 0$)

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0 \\
v_1 &= 0 \\
u_2 &= 0 \\
v_2 &= 0 \\
h\varphi_1 - h\varphi_2 &= 0 \\
\varphi_1 + \varphi_2 &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.5.7}
$$

Il determinante della matrice dei coefficienti del sistema è

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 & -h \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.
$$

Evidentemente

$$
\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & -h \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h & -h \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = h + h = 2h \ .
$$

Pertanto se $h \neq 0$ il problema (1.5.2) ammette soluzione unica. In tal caso le (1.5.7) si scrivono

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0 \\
v_1 &= 0 \\
u_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$v_2 = 0$$
$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0$$
$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0$$

e di qui

$$u_1 = 0$$
$$v_1 = 0$$
$$\varphi_1 = 0$$
$$u_2 = 0$$
$$v_2 = 0$$
$$\varphi_2 = 0$$

sicché i vincoli non consentono al sistema cinematismi (cioè ai corpi della struttura di assumere posizioni distinte da quella iniziale).
Se h=0 è $\Delta = 0$. Poiché il minore complementare di a_{56} è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

il problema (1.5.2) ammette ∞^1 soluzioni. Pertanto la struttura con h = 0 ha

$$u_1 = 0$$
$$v_1 = 0$$
$$u_2 = 0$$
$$v_2 = 0$$
$$\varphi_1 - \varphi_2 \text{ qualsiasi}$$
$$\varphi_2 = -\varphi_1$$

ovvero

$$u_1 = 0$$
$$v_1 = 0$$
$$\varphi_1 \text{ qualsiasi (purché piccolo)}$$
$$u_2 = 0$$
$$v_2 = 0$$
$$\varphi_2 = -\varphi_1$$

Così l'arco a tre cerniere con cerniere allineate (1.5.6) è una volta labile.

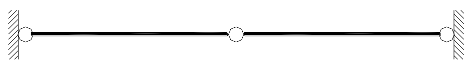

Fig. 1.5.6

PROBLEMA 1.5.3. *Eseguire l'analisi cinematica della struttura di fig. 1.5.7* $\left(\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

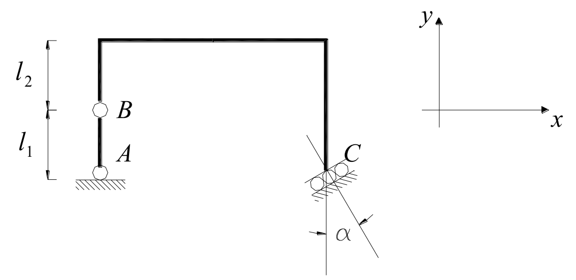

Fig.1.5.7

Procediamo con *l'Analisi matriciale.* Risulta t=2. Assumiamo $P_1 = A,\ P_2 = C$. Pertanto le incognite sono $u_1, v_1, \varphi_1, u_2, v_2, \varphi_2$ e le equazioni di vincolo sono (fig.1.5.8)

$$
\begin{aligned}
&u_1 = 0\\
&v_1 = 0\\
&u_2 sen\alpha + v_2 \cos\alpha = (\vec{s} \times \vec{n}) = 0\\
&\varphi_2 = 0\\
&-\varphi_1 l_1 = u_2\\
&0 = v_2\ .
\end{aligned}
$$

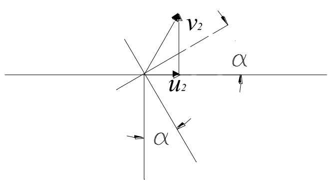

Fig. 1.5.8.

Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & sen\alpha & cos\alpha & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & +l_1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}
= (-1)\begin{vmatrix}
0 & sen\alpha & cos\alpha\\
l_1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1
\end{vmatrix}
= +\, l_1\, sen\alpha\ .
$$

Pertanto se $\alpha \neq 0$ il sistema è di Cramer e ammette soluzione unica. In tal caso quindi $l = 0$ e i=0.
Se $\alpha = 0$ la matrice dei coefficienti è