

Aldo Maceri

*Il principio dei  
lavori virtuali*



Accademica

Prof. Ing. Aldo Maceri  
Professore Ordinario di Scienza delle Costruzioni  
Università di Roma “Roma Tre”  
Dipartimento di Ingegneria  
Italia

<https://www.aldo-maceri.com>

Copyright © 2008 by Accademica s.r.l., Roma, Italy

Quest'opera è soggetta a copyright. I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati per tutti i paesi.

<https://www.accademica.eu>

ISBN 978-88-85929-34-0

Aldo Maceri – *Il principio dei lavori virtuali*

## *PREFAZIONE*

La *Scienza delle Costruzioni* è la disciplina di base per il dimensionamento e per la verifica della sicurezza di tutte le *Costruzioni* dell'*Ingegneria*, di tipologia sia civile che militare:

- edifici, ponti e grandi strutture (*Ingegneria civile*)
- macchine (*Ingegneria meccanica*)
- aerei ed elicotteri (*Ingegneria aeronautica*)
- navi e sommergibili (*Ingegneria navale*).

La *Scienza delle Costruzioni* consta di due parti primarie: la *Teoria dell'elasticità* e la *Teoria delle strutture*. Ad esse va aggiunto il cenno ad una terza sezione: la *Stabilità dell'equilibrio*, che è un fenomeno tanto frequente, pericoloso e complesso da imporne un sia pur breve cenno di anticipazione.

La *Teoria dell'elasticità* è una teoria matematica che ha permesso di simulare, in modo praticamente perfetto, il comportamento di un corpo solido nell'ipotesi di elasticità lineare e di piccole deformazioni, ipotesi pienamente soddisfacente sul piano tecnico. Tuttavia, i modelli matematici di alcuni particolari problemi fisici non sono organizzabili in teorie matematiche (cioè sono matematicamente mal posti). Sono chiamati teorie tecniche; sono di semplice impiego e sono sempre stati soddisfacentemente in accordo con le esperienze eseguite nei *Laboratori prove materiali* e confermati dalle numerosissime realizzazioni eseguite in tutti i settori dell'*Ingegneria*.

La *Teoria delle strutture* applica i risultati della *Teoria dell'elasticità* alle strutture dell'*Ingegneria*, consentendone il calcolo. Attualmente viene dato ampio

rilievo al *metodo degli spostamenti*, che è il solo facilmente programmabile al computer e perciò stesso consente il *Calcolo automatico delle strutture*. E' necessario però dare ampio spazio anche ai metodi di calcolo tradizionali (*congruenza e principio dei lavori virtuali*), tuttora importantissimi per la piena comprensione della problematica. Nella medesima ottica, occorre dare spazio anche ai metodi grafici del *Calcolo strutturale*.

Questo ebook rispecchia i corsi di *Scienza delle Costruzioni* che ho tenuto presso l'Università di Roma. Nel presentarne la problematica, il mio impegno costante è stato quello di conseguire la massima chiarezza e ad esso ho sacrificato più di una brillante discussione. Ho svolto la trattazione in modo classico, ma esaustivo e dettagliato, alla luce della moderna *Teoria matematica dell'elasticità* e con più accentuato rilievo alle connessioni con la *Termodinamica*. L'esposizione è costantemente corredata da numerosi esempi di calcolo, di crescente complessità, tutti svolti integralmente e nel dettaglio. Per la lettura di questo ebook sono sufficienti, come prerequisiti, le nozioni classiche di *Analisi matematica* e di *Fisica* impartite nei corsi universitari di *Ingegneria*.

**Questo ebook è il capitolo 4 della seconda edizione del mio libro *Scienza delle Costruzioni*, di 824 pagine, copyright Accademica S.r.l. del 2008.**

Roma 1.12.2008

Aldo Maceri

# INDICE

## PREFAZIONE

CAPITOLO 1	TEORIA DEI SISTEMI DI FORZE.....	1
1	Sistemi di forze dello spazio.....	1
1.1	Richiami di Geometria analitica.....	1
1.2	Vettori.....	7
1.3	Componente di un vettore.....	9
1.4	Prodotto scalare.....	11
1.5	Risultante.....	13
1.6	Momento rispetto a un punto	16
1.7	Momento rispetto a una retta.....	19
1.8	Asse centrale.....	22
1.9	Sistemi di forze equivalenti.....	23
1.10	Sistemi di forze complanari.....	26
1.11	Sistemi di forze parallele.....	26
2	Sistemi piani di forze.....	28
2.1	Richiami di Geometria analitica.....	28
2.2	Vettori.....	30
2.3	Componente di un vettore.....	32
2.4	Prodotto scalare.....	34
2.5	Risultante.....	35
2.6	Momento rispetto a un punto.....	37
2.7	Asse centrale.....	42
2.8	Sistemi di forze equivalenti.....	43
2.9	Sistemi di forze parallele.....	49
2.10	Il poligono funicolare.....	54
3	Cambiamento di riferimento.....	65
3.1	Il caso tridimensionale.....	65
3.2	Il caso bidimensionale.....	67
CAPITOLO 2	ANALISI DELLA DEFORMAZIONE	69
1	Componenti dello spostamento.....	69
2	La deformazione dell'intorno di un punto.....	70
3	Allungamenti e scorrimenti.....	71

4	Il campo delle piccole deformazioni.....	72
5	Relazioni tra allungamenti, scorrimenti e componenti dello spostamento.....	77
6	Direzioni principali di deformazione.....	81
7	Invarianti della deformazione.....	87
8	Stati piani di deformazione.....	89
9	Le equazioni di congruenza.....	90
10	Analisi sperimentale della deformazione.....	92
CAPITOLO 3	ANALISI DELLA TENSIONE.....	94
1	Il vettore sforzo.....	94
2	Tensione normale. Tensione tangenziale.....	96
3	Le componenti speciali della tensione.....	97
4	Simmetria delle tensioni tangenziali. Equazioni indefinite dell'equilibrio. Espressione delle componenti del vettore sforzo in funzione delle componenti speciali della tensione. Equazioni ai limiti di Cauchy.....	97
5	Simmetria dei vettori sforzo.....	103
6	Espressione della tensione normale e della tensione tangenziale in funzione delle componenti speciali della tensione.....	104
7	Direzioni principali della tensione. Tensioni principali.....	105
8	Invarianti della tensione.....	108
9	Il cerchio di Mohr.....	108
10	I cerchi principali di Mohr.....	118
11	Determinazione della massima tensione normale e della massima tensione tangenziale con i cerchi principali di Mohr.....	121
12	Stati tensionali piani.....	122
13	Stati tensionali monoassiali.....	124
14	Analisi sperimentale della tensione.....	124
CAPITOLO 4	IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI	126
1	Il principio dei lavori virtuali	126
CAPITOLO 5	LE RELAZIONI TRA TENSIONI E DEFORMAZIONI.....	130
1	La legge di Hooke.....	130
2	Materiali omogenei e isotropi.....	134

	2.1	Relazioni di Navier.....	134
	2.2	Limitazioni per i moduli elastici.....	138
<b>CAPITOLO 6</b>		<b>IL PROBLEMA DELL'EQUILIBRIO ELASTICO</b>	<b>141</b>
	1	Le formulazioni classiche.....	141
	2	Le formulazioni variazionali.....	149
<b>CAPITOLO 7</b>		<b>STATI PIANI DI DEFORMAZIONE E DI TENSIONE.....</b>	<b>152</b>
	1	Problemi di deformazione piana.....	152
	2	Problemi di tensione piana.....	157
	3	La funzione di Airy.....	162
	4	La lastra rettangolare	164
	4.1	Sforzo normale.....	164
	4.2	Flessione.....	165
	4.3	Taglio e flessione.....	166
	5	La funzione di Airy in coordinate polari.....	168
	6	Problemi bidimensionali in coordinate polari....	177
	6.1	Problemi a simmetria polare.....	177
	6.2	Il problema di Boussinesq.....	181
	6.3	Disco caricato da due forze diametrali.....	184
	6.4	Effetto di un foro in una lastra.....	186
<b>CAPITOLO 8</b>		<b>IL LAVORO DI DEFORMAZIONE.....</b>	<b>192</b>
	1	Richiami di Termodinamica.....	192
	2	Termodinamica del problema dell'equilibrio elastico.....	198
	3	Il lavoro di deformazione.....	200
	4	Il potenziale elastico.....	204
	5	Il minimo dell'energia.....	209
	6	Il lavoro mutuo.....	210
	7	La derivata del lavoro.....	212
<b>CAPITOLO 9</b>		<b>LA SICUREZZA STATICA.....</b>	<b>215</b>
	1	Generalità.....	215
	2	Il criterio della massima tensione tangenziale...	216
	3	Il criterio della tensione tangenziale ottaedrale..	217
	4	Il criterio energetico.....	218
	5	Il criterio della curva intrinseca.....	221

## VIII

6	Esempi di applicazioni.....	222
<b>CAPITOLO 10</b>	<b>GEOMETRIA DELLE AREE.....</b>	<b>225</b>
1	Aree. Aree concentrate.....	225
2	Momento statico.....	226
3	Baricentro.....	227
4	Momento di inerzia. Momento centrifugo.....	229
5	I teoremi del trasporto.....	231
6	Ellisse centrale di inerzia.....	235
7	Antipolarità.....	237
8	Nocciolo centrale di inerzia.....	250
<b>CAPITOLO 11</b>	<b>IL PROBLEMA DI SAINT VENANT.....</b>	<b>253</b>
1	Il problema di Saint Venant.....	253
2	Lo stato tensionale nel problema di Saint Venant	257
3	Sforzo normale baricentrico.....	260
4	Flessione retta.....	264
5	Flessione deviata.....	280
6	Pressoflessione.....	285
7	Torsione.....	297
	7.1 La soluzione esatta.....	297
	7.2 L'analogia idrodinamica.....	309
	7.3 La concentrazione delle tensioni nella torsione	316
	7.4 La verifica di sicurezza.....	317
8	Taglio.....	320
	8.1 La soluzione esatta.....	320
	8.2 La trattazione approssimata del taglio.....	337
	8.3 La verifica di sicurezza.....	345
<b>CAPITOLO 12</b>	<b>I MATERIALI NON RESISTENTI A TRAZIONE.....</b>	<b>349</b>
1	Generalità.....	349
2	La pressoflessione dei materiali non resistenti a trazione.....	349
<b>CAPITOLO 13</b>	<b>LA TRAVE A PARETE SOTTILE</b>	<b>353</b>
1	Generalità.....	353
2	La torsione delle travi a parete sottile.....	354



	2.1	Generalità.....	354
	2.2	La torsione delle sezioni sottili chiuse.....	354
	2.3	La torsione della sezione rettangolare allungata.....	362
	2.4	La torsione dei profilati.....	364
	2.5	Ulteriori considerazioni sulla torsione delle sezioni sottili.....	370
	2.6	La verifica di sicurezza nella torsione delle sezioni sottili.....	371
3		Il taglio nelle travi a parete sottile.....	375
	3.1	Il taglio nelle sezioni sottili aperte.....	375
	3.2	La determinazione del centro di taglio nelle sezioni sottili aperte.....	391
	3.3	Il taglio nelle sezioni sottili chiuse.....	396
	3.4	La determinazione del centro di taglio nelle sezioni sottili chiuse.....	398
	3.5	La verifica di sicurezza nel taglio delle sezioni sottili.....	399
4		Le tensioni secondarie nella torsione non uniforme delle sezioni sottili.....	401
<b>CAPITOLO 14</b>		<b>CINEMATICA DEI CORPI RIGIDI.....</b>	<b>415</b>
	1	I vincoli.....	415
	2	Strutture labili, isostatiche, iperstatiche.....	422
	3	Le catene cinematiche.....	445
<b>CAPITOLO 15</b>		<b>STATICA DEI CORPI RIGIDI.....</b>	<b>457</b>
	1	Le reazioni vincolari.....	457
	2	Le equazioni cardinali della Statica.....	461
	3	La determinazione delle reazioni vincolari.....	462
	4	Le caratteristiche della sollecitazione.....	479
	5	Statica grafica.....	514
<b>CAPITOLO 16</b>		<b>TEORIA DELLE TRAVI INFLESSE.....</b>	<b>534</b>
	1	La trave inflessa.....	534
	2	Il modello matematico della trave inflessa.....	535
	3	L'analogia di Mohr.....	545
	4	Il principio dei lavori virtuali.....	555
	5	Il lavoro di deformazione.....	556
	6	L'energia.....	558
	7	Il minimo dell'energia potenziale.....	559
	8	Il lavoro mutuo.....	560
	9	La derivata del lavoro.....	564

10	Le linee di influenza.....	567
<b>CAPITOLO 17</b>	<b>TEORIA DELLE STRUTTURE.....</b>	<b>573</b>
1	Il modello matematico.....	573
2	I cedimenti vincolari.....	575
3	Il metodo delle forze: le equazioni di congruenza	578
3.1	Generalità .....	578
3.2	Le equazioni dei tre momenti.....	594
3.3	Le equazioni dei quattro momenti.....	606
4	Il metodo delle forze: il principio dei lavori virtuali.....	618
4.1	Generalità .....	619
4.2	Soluzione delle strutture isostatiche.....	619
4.3	Calcolo di spostamenti nelle strutture isostatiche.....	623
4.4	Soluzione delle strutture iperstatiche.....	644
4.5	Calcolo di spostamenti nelle strutture iperstatiche.....	661
5	Il metodo degli spostamenti.....	664
5.1	Il principio degli spostamenti.....	664
5.2	Il metodo degli spostamenti.....	667
6	Il principio di simmetria.....	676
<b>CAPITOLO 18</b>	<b>LE TENSIONI TERMICHE.....</b>	<b>680</b>
1	Meccanica del continuo.....	680
1.1	Introduzione.....	680
1.2	Richiami di Termodinamica.....	681
1.3	Le equazioni del bilancio.....	687
1.4	Termodinamica dei processi irreversibili.....	690
2	Meccanica dei solidi.....	693
2.1	Il problema termoelastico.....	693
2.2	La dissipazione termoelastica.....	702
2.3	La Termoelasticità disaccoppiata.....	703
2.4	Trasmissione del calore.....	704
2.5	Termoelasticità.....	705
3	Le strutture con carico termico lineare.....	707
3.1	La trave inflessa termoelastica.....	707
3.2	Il metodo degli spostamenti.....	722
3.3	Il metodo delle forze: le equazioni di congruenza	740
3.4	Il metodo delle forze: il principio dei lavori virtuali.....	751
<b>CAPITOLO 19</b>	<b>LA STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO.....</b>	<b>773</b>

1	Il fenomeno della instabilità.....	773
2	Il metodo energetico.....	775
3	Il metodo statico.....	780
3.1	La trave caricata di punta.....	780
3.2	Altri casi di travi caricate di punta.....	786
3.3	Effetto delle imperfezioni.....	794
3.4	La snellezza limite.....	796
3.5	La sicurezza alla stabilità.....	797
4	L'instabilità di seconda specie.....	802

BIBLIOGRAFIA

## CAPITOLO 4

### ***IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI***

**1 Il principio dei lavori virtuali.** Sia  $C$  un solido la cui materia occupa con continuità una porzione  $V$  dello spazio a tre dimensioni. Denotiamo con  $S$  la superficie del corpo (cioè la frontiera di  $V$ ). Vogliamo ora ricavare una relazione in cui compaiono funzioni tensioni e funzioni deformazioni relative al corpo, e che va sotto il nome di principio dei lavori virtuali. Si tratta, e ciò sarà subito chiarito, di una relazione astratta, cioè di una relazione matematica priva di significato fisico. Però esso nell'ambito della *Scienza delle costruzioni* è uno dei più potenti strumenti di indagine teorica e di calcolo.

Non si fanno ipotesi né sulla natura né sulle caratteristiche meccaniche del materiale di cui è fatto il corpo  $C$ . Chiamiamo problema  $A$  (o *sistema delle forze*) quello così costituito. Sul corpo sono applicate forze di volume  $X, Y, Z$  e forze superficiali  $p_x, p_y, p_z$  costituenti un sistema equilibrato (fig. 4.1). Denotiamo con

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$$

una sestupla di funzioni soddisfacente in  $V$  le equazioni indefinite dell'equilibrio

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned}$$

e su  $S$  le equazioni ai limiti di *Cauchy*

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= p_x \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z &= p_y \end{aligned}$$

$$\tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + \sigma_z n_z = p_z .$$

Nelle (4.2)  $n_x, n_y, n_z$  denotano i coseni direttori della normale uscente da  $S$  (fig. 4.2). Quindi ogni elemento del corpo, interno o di contorno, è in equilibrio. Ciò ovviamente non vuol dire che tali tensioni sono quelle che effettivamente nascono nel corpo quando si applica su di esso il carico. Infatti ogni elemento di materiale, essendo sottoposto alle  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  e al carico esterno  $p_x, p_y, p_z, X, Y, Z$  si deforma, e le  $\varepsilon$  e  $\gamma$  che nascono possono non soddisfare le equazioni di congruenza (2.29) del cap. 2. Perciò le tensioni che si considerano nel problema  $A$  sono equilibrate ma in genere non congruenti <sup>4.1</sup>.

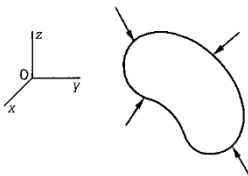


Fig. 4.1

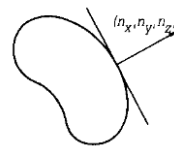


Fig. 4.2

Chiamiamo problema  $B$  (o *sistema degli spostamenti*) quello costituito dal corpo  $C$  e da una terna regolare di funzioni spostamento  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ . La causa che provoca tale deformazione del corpo non viene precisata (può trattarsi di un carico che viene applicato sul corpo ma potrebbe anche trattarsi di una deformazione di natura termica, dovuta cioè alla presenza di una fonte di calore; oppure ancora potrebbe trattarsi di una rotazione rigida, caso nel quale ovviamente si hanno spostamenti ma non deformazioni). Facciamo l'ipotesi, nel problema  $B$ , di piccole deformazioni, sicché, detti  $\tilde{\varepsilon}_x, \tilde{\varepsilon}_y, \tilde{\varepsilon}_z, \tilde{\gamma}_{xy}, \tilde{\gamma}_{xz}, \tilde{\gamma}_{yz}$  gli allungamenti e scorrimenti associati (nel problema  $B$ ) a  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ , risulta <sup>4.2</sup>

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_x &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} , & \tilde{\varepsilon}_y &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} , & \tilde{\varepsilon}_z &= \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} , \\ \tilde{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} , & \tilde{\gamma}_{xz} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} , & \tilde{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} . \end{aligned}$$

<sup>4.1</sup> Un siffatto stato tensionale viene talvolta chiamato *sistema staticamente ammissibile*.

<sup>4.2</sup> Un siffatto stato di deformazione viene talvolta chiamato *sistema cinematicamente ammissibile*.